

---

Übungsblatt 6 zur Einführung in die Algebra

---

**Aufgabe 1.** Sei  $A$  ein kommutativer Ring und  $S \subseteq A$  eine multiplikative Menge ohne Nullteiler.

(a) Zeige, dass auf  $A \times S$  durch

$$(a,s) \sim (b,t) \iff at = bs \quad (a,b \in A, s,t \in S)$$

eine Äquivalenzrelation  $\sim$  definiert wird.

(b) Durch

$$\widetilde{(a,s)} + \widetilde{(b,t)} := \widetilde{(at + bs, st)} \quad \text{und} \quad \widetilde{(a,s)}\widetilde{(b,t)} := \widetilde{(ab, st)} \quad (a,b \in A, s,t \in S)$$

erhält man wohldefinierte Operationen  $+$  und  $\cdot$  auf  $(A \times S)/\sim$ .

(c) Mit den Operationen aus (b) wird  $(A \times S)/\sim$  zu einem kommutativen Ring mit  $0 = \widetilde{(0,1)}$  und  $1 = \widetilde{(1,1)}$ .

(d) Es ist  $\iota: A \rightarrow (A \times S)/\sim, a \mapsto \widetilde{(a,1)}$  eine Einbettung.

**Aufgabe 2.** Sei  $A$  ein Unterring des kommutativen Ringes  $B$ ,  $S \subseteq A \cap B^\times$  multiplikativ und  $B = S^{-1}A$ . Sei  $C$  ein weiterer Ring und  $\varphi: A \rightarrow C$  ein Homomorphismus.

(a) Zeige, dass es genau dann einen Homomorphismus  $\psi: S^{-1}A \rightarrow C$  mit  $\varphi = \psi|_A$  gibt, wenn  $\varphi(S) \subseteq C^\times$ .

(b) Zeige, dass ein Homomorphismus  $\psi$  wie in (a) eindeutig bestimmt. Genauer: Zeige, dass für dieses  $\psi$  gilt

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } s \in S.$$

**Aufgabe 3.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $n \in \mathbb{N}$  und  $A := R[X_1, \dots, X_n]$

(a) Zeige  $A^\times = R^\times$ , wenn  $R$  ein Integritätsring ist.

(b) Gebe ein Beispiel für  $R$  mit  $A^\times \neq R^\times$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $S$  und  $T$  multiplikative Mengen eines kommutativen Ringes  $R$  mit  $S \subseteq T$ .

(a) Zeige, dass  $\overline{T} := \iota_S(T)$  eine multiplikative Menge in der Lokalisierung  $R_S$  ist.

(b) Zeige  $(R_S)_{\overline{T}} \cong R_T$ .

**Abgabe bis Montag, den 29. November 2010, vor der Vorlesung.**