

Übungsklausur zur Linearen Algebra I

Name: Max Mustermann
Übungsgruppe: Y

Matrikelnummer: 00/112233
Erreichte Punktzahl: 64

Prüfen Sie sofort, ob Sie alle **8 Aufgaben** erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Tragen Sie auf dieser Seite und bei jeder Aufgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen verwendet werden.

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 110 Minuten.
Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 64.

Die einzigen erlaubten Arbeits-/Hilfsmittel sind

- ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Zeigen Sie durch Überprüfen der beiden Inklusionen oder widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels:
Für alle Mengen A, B, C gilt

- (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
- (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Lösung 1:

- (a) Sei $x \in A \setminus (B \cap C)$. Dann ist $x \in A$ und $x \notin B \cap C$, d.h. es gilt $x \in A$ und $x \notin B$ (1. Fall) oder es gilt $x \in A$ und $x \notin C$ (2. Fall). Im ersten Fall ist $x \in A \setminus B$, im zweiten Fall ist $x \in A \setminus C$. In beiden Fällen ist also $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Sei nun $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Dann ist $x \in A \setminus B$ (1. Fall) oder $x \in A \setminus C$ (2. Fall). Im beiden Fällen ist $x \in A$. Im ersten Fall gilt außerdem $x \notin B$, also auch $x \notin B \cap C$, da $B \cap C \subseteq B$ gilt. Analog folgert man auch im zweiten Fall $x \notin B \cap C$. Also folgt insgesamt, dass $x \in A \setminus (B \cap C)$ gilt.

- (b) Diese Aussage ist i.A. falsch. Dies zeigt das folgende Gegenbeispiel: Seien $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 3\}$ und $C := \{3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= \{1, 2, 3\} \setminus (\{2, 3\} \setminus \{3\}) = \{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\} \\ &\neq \{1\} = \{1\} \setminus \{3\} = (\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\}) \setminus \{3\} = (A \setminus B) \setminus C. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (6 Punkte) & Lösung

- (a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie es *nicht* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an. (3 Punkte)

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es einen halben Punkt. Für jede falsche *Ja*-Antwort gibt es einen halben Punkt Abzug, für jede falsche bzw. unzureichend begründete *Nein*-Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

Abbildung	(i) injektiv? (ii) surjektiv?	Begründung, falls nicht
$f_1: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\},$ $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 1$	(i) nein (ii) nein	2 und 3 werden auf 1 abgebildet 3 ist nicht im Bild der Abbildung
$f_2: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$	(i) ja (ii) ja	
$f_3: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$	(i) nein (ii) ja	$f_3((1, 1)) = \frac{1}{1} = 1 = \frac{2}{2} = f_3((2, 2))$

- (b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen auf der Menge M reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie es *nicht* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an. (3 Punkte)

Sind bei einer Relation alle drei Antworten richtig (ggf. mit richtiger Begründung), so gibt es einen Punkt. Sind zwei Antworten richtig (begründet), gibt es noch einen halben Punkt. Ansonsten gibt es keinen Punkt. Außerdem gibt es für jede falsche *Ja*-Antwort einen halben Punkt Abzug. Die Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten gewertet.

Relation	(i) reflexiv? (ii) symmetrisch? (iii) transitiv?	Begründung, falls nicht
$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\},$ $M = \mathbb{N}$	(i) nein (ii) ja (iii) nein	$4 \in \mathbb{N} = M$, aber $(4, 4) \notin R_1$ $(1, 2), (2, 3) \in R_1$, aber $(1, 3) \notin R_1$
$R_2 = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq m\},$ $M = \mathbb{N}$	(i) ja (ii) nein (iii) ja	$1 \leq 2$, aber $2 \not\leq 1$
$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5 \mid y = x^3\},$ $M = \mathbb{F}_5$	(i) nein (ii) ja (iii) nein	$(2, 2) \notin R_3$ $(2, 3), (3, 2) \in R_3$, aber $(2, 2) \notin R_3$

Name: Max Mustermann
Übungsgruppe: Y

Matrikelnummer: 00/112233
Erreichte Punktzahl: 4

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien M, N Mengen, und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Für $x, y \in M$ definieren wir die Relation

$$x \sim_f y : \iff f(x) = f(y).$$

Sie dürfen uneingeschränkt verwenden, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation auf M handelt.

Sei nun $M = \{1, \dots, 20\}$, $N = \{1, \dots, 10\}$ und f bilde $x \in M$ auf dessen Quersumme ab. Dabei sei die Quersumme von x definiert als die Summe aller Ziffern in der üblichen Darstellung von x im Zehnersystem. Geben Sie M / \sim_f an, also die Quotientenmenge bezüglich der Äquivalenzrelation \sim_f auf M .

Lösung 3:

Die Quotientenmenge besteht aus allen Äquivalenzklassen. Zwei Zahlen aus M sind äquivalent, wenn sie dieselbe Quersumme haben. Also ist

$$M / \sim_f = \{\{1, 10\}, \{2, 11, 20\}, \{3, 12\}, \{4, 13\}, \{5, 14\}, \{6, 15\}, \{7, 16\}, \{8, 17\}, \{9, 18\}, \{19\}\}.$$

Aufgabe 4: (6 Punkte) & Lösung

Seien a, b, c, d, e paarweise verschieden. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen durch die jeweils angegebene Additionstafel zu abelschen Gruppen werden. Falls Sie zum Schluss kommen, dass dies *nicht* der Fall ist, so geben Sie eine *kurze* Begründung an.

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es zwei Punkt. Für jede falsche *Ja*-Antwort gibt es einen Punkt Abzug, für jede falsche bzw. nicht begründete *Nein*-Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

(a) $\{a, b, c\}$ vermöge

+	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Ja.

(b) $\{a, b, c, d, e\}$ vermöge

+	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	d
d	d	e	a	d	c
e	e	a	d	c	d

Nein, denn in Zeile d steht zweimal der Eintrag d . Dies kann in der Additionstafel einer abelschen Gruppe nicht vorkommen (Aufgabe 3.1 (b)). Hier erhält man sonst den folgenden Widerspruch: Es gilt $d + a = d = d + d$. Addieren von $-d$ auf beiden Seiten ergibt: $a = d$. Dies ist ein Widerspruch zu Voraussetzung, die besagt, dass die fünf Elemente paarweise verschieden sind.

(c) $\{a, b, c, d\}$ vermöge

+	a	b	c	d
a	a	b	d	c
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Nein, denn die Tafel ist nicht symmetrisch. Dies kann in einer abelschen Gruppe nicht vorkommen (Aufgabe 3.1 (a)). Hier gilt nämlich $c + a \neq a + c$, ein Widerspruch zur Kommutativität einer abelschen Gruppe.

Name: Max Mustermann
 Übungsgruppe: Y

Matrikelnummer: 00/112233
 Erreichte Punktzahl: 10

Aufgabe 5: (10 Punkte) & Lösung

Entscheiden Sie, ob folgende Behauptungen wahr sind. Falls Sie zum Schluss kommen, dass sie *falsch* sind, so geben Sie eine *kurze* Begründung an.

Für jede richtige Antwort (mit richtiger Begründung) gibt es einen Punkt. Für jede falsche *Ja*-Antwort gibt es einen Punkt Abzug, für jede falsche bzw. nicht begründete *Nein*-Antwort und jede unbeantwortete Frage gibt es keinen Punkt. Die Aufgabe wird mindestens mit 0 Punkten gewertet.

Aussage	Wahr?	Begründung, falls nicht
$(\mathbb{Z}/(4), +, \cdot)$ ist ein Körper.	nein	$\bar{2} \cdot \bar{2} = 0$, aber $\bar{2} \neq 0$. Dies kann in einem Körper nicht gelten (vgl. Aufgabe 7.1 (e)).
Die Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(2)$, $f(x) := \overline{x^2}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.	ja	
Für jede Menge M ist $(\mathcal{P}(M), \cap)$ eine abelsche Gruppe.	nein	Es wäre sonst M das neutrale Element. Ist $M \neq \emptyset$, so existiert aber kein $N \subseteq M$ mit $\emptyset \cap N = M$.
Ein Körper ist stets ein kommutativer Ring.	ja	
Für jede Menge M ist $(\mathcal{P}(M), \cup)$ eine abelsche Gruppe.	nein	Es wäre sonst \emptyset das neutrale Element. Ist $M \neq \emptyset$, so existiert aber kein $N \subseteq M$ mit $M \cup N = \emptyset$.
In \mathbb{F}_{49} gibt es Elemente $x, y \neq 0$ mit $x \cdot y = 0$.	nein	\mathbb{F}_{49} ist ein Körper, darin gibt es solche Elemente nicht (Aufgabe 7.1 (e)).
Für jede Menge M ist die Abbildung $\mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, $N \mapsto \mathcal{P}(N)$ injektiv.	ja	
Ein Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow H$ bildet die 0 von G stets auf die 0 von H ab.	ja	
Zu jedem Vektorraum V gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \dots, v_n \in V$, so dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.	nein	Es ist für einen Körper K zum Beispiel der Polynomring $K[X]$ ein nicht endlich-erzeugter K -Vektorraum (Vorlesung).
Ist A ein kommutativer Ring, der einen Körper K als Unterring enthält, so ist A ein K -Vektorraum.	ja	

Aufgabe 6: (12 Punkte)

Seien G und H abelsche Gruppen. Seien $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und \equiv eine Kongruenzrelation auf G . Zeigen Sie ohne Verwendung von Ergebnissen aus der Vorlesung und den Übungen:

- (a) Die Kongruenzklasse von $0 \in G$ bezüglich \equiv ist eine Untergruppe von G .
- (b) Die Menge $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = 0\}$ ist eine Untergruppe von G .
- (c) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ gilt.

Lösung 6:

- (a) Es ist offensichtlich $0 \in \bar{0}$.
Seien $a, b \in \bar{0}$. Da \equiv eine Kongruenzrelation auf G ist, folgt aus $a \equiv 0$ und $b \equiv 0$ auch $a + b \equiv 0 + 0 = 0$. Somit ist auch $a + b \in \bar{0}$.
Sei $a \in \bar{0}$. Da \equiv eine Kongruenzrelation auf G ist, folgt aus $a \equiv 0$ und $-a \equiv -a$ auch $0 = a + (-a) \equiv 0 + (-a) = -a$. Somit ist auch $-a \in \bar{0}$.
Insgesamt folgt also, dass $\bar{0}$ eine Untergruppe von G ist.
- (b) Wegen $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, ist $f(0) = 0$. Also $0 \in \ker f$.
Seien $a, b \in G$ mit $f(a) = 0 = f(b)$. Da f ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$. Also ist auch $a + b \in \ker f$.
Sei $a \in \ker f$. Es ist $0 = f(0) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a) = 0 + f(-a) = f(-a)$. Also ist $-a \in \ker f$.
- (c) Es gelte, dass f injektiv ist. Sei nun $a \in \ker f$, d.h. $f(a) = 0$. Es ist aber auch $f(0) = 0$. Da f injektiv ist, folgt $a = 0$.
Nun gelte, dass $\ker f = \{0\}$ ist. Seien $a, b \in G$ mit $f(a) = f(b)$. Dann ist $0 = f(a) - f(b) = f(a - b)$, d.h. $a - b \in \ker f$, also $a - b = 0$. Dies zeigt $a = b$.

Aufgabe 7: (12 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die folgenden Reste in \mathbb{Z} .
- (i) $367 \bmod 12$ (1 Punkt)
 - (ii) $123456789101112 \bmod 3$ (1 Punkt)
 - (iii) $(393)^{141209} \bmod 13$ (2 Punkte)
- (b) Berechnen Sie folgende Reste in den angegebenen Polynomringen.
- (i) In $\mathbb{F}_5[X]$: $(X^4 + 4X^2)^{777} \bmod 2X^4 - 12X^2 + 1$. (2 Punkte)
 - (ii) In $\mathbb{Q}[X]$: $12X^{457} - 13X^{238} + 27X^{134} - 17X^{39} + 19X^{14} - 11 \bmod (X^2 - 1)$. (2 Punkte)
- (c) Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome im Körper \mathbb{F}_7 .
- (i) $2X^2 - 4X + 1$ (1 Punkt)
 - (ii) $X^6 - 1$ (1 Punkt)
 - (iii) $3X^{312} - 5X^{132} + X^{17} - 1$ (2 Punkte)

Lösung 7:

- (a) (i) $360 = 12 \cdot 30$, also $367 \equiv_{(12)} 7$. Da $7 \in \{0, \dots, 11\}$, ist $367 \bmod 12 = 7$.
- (ii) $10 \equiv_{(3)} 1$, also $10^n \equiv_3 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $123456789101112 \equiv_{(3)} \underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+1+1+1+2}_{=3} \equiv_{(3)} 0$.
- (iii) $390 = 13 \cdot 30$, also $393 \equiv_{(13)} 3$. Es gilt aber $3^3 = 27 \equiv_{(13)} 1$. Damit ist $393^{141209} \equiv_{(13)} 3^{12 \cdot 10000 + 12 \cdot 100 + 9} \cdot 3^{2 \cdot 10000} \equiv_{(13)} (3^{9999+1})^2 \equiv_{(13)} 3^2 = 9$.
- (b) (i) Es ist $X^4 + 4X^2 = 3 \cdot (2X^4 - 12X^2 + 1) + 2$ über \mathbb{F}_5 . Weiter ist $2^4 = 16 = 1$ in \mathbb{F}_5 . Damit ist $2^{777} = 2^{776+1} = 2$. Insgesamt folgt $(X^4 + 4X^2)^{777} \bmod 2X^4 - 12X^2 + 1 = 2$.
- (ii) Wegen $X^2 \equiv_{(X^2-1)} 1$, ist $12X^{457} - 13X^{238} + 27X^{134} - 17X^{39} + 19X^{14} - 11 = 12(X^2)^{228} \cdot X - 13(X^2)^{119} + 27(X^2)^{67} - 17(X^2)^{19} \cdot X + 19(X^2)^2 - 11 \equiv_{(X^2-1)} 12X - 13 + 27 - 17X + 19 - 11 = -5X - 22$.
- (c) (i) Es gilt $2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 0$ in \mathbb{F}_7 . Außerdem ist $2X^2 - 4X + 1 = (X+1) \cdot 2 \cdot (X + \frac{1}{2})$. In \mathbb{F}_7 ist $-\frac{1}{2} = 3$. Somit sind 3 und $-1 = 6$ die beiden Nullstellen von $2X^2 - 4X + 1$ in \mathbb{F}_7 .
- (ii) Nach Aufgabe 6.3 (c) sind die Nullstellen von $X^6 + 1$ in \mathbb{F}_7 gerade die von 0 verschiedenen Elemente.
- (iii) Man sieht sofort, dass 0 keine Nullstelle dieses Polynoms ist. Für $0 \neq a \in \mathbb{F}_7$ ist aber $a^6 = 1$. Somit sind die Nullstellen von $3X^{312} - 5X^{132} + X^{17} - 1$ in \mathbb{F}_7 gerade die Nullstellen von $3 - 5 + X^5 - 1 = X^5 + 4$. Nachrechnen zeigt, dass $-2 = 5$ die einzige Nullstelle dieses Polynoms ist.

Aufgabe 8: (8 Punkte)

Lösen Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem über dem Körper \mathbb{C} und geben Sie dabei alle Zwischenschritte an.

$$\begin{aligned} 1x_1 + i x_2 + (2 + i)x_3 + (-1 + 3i)x_4 &= 0 \\ (1 + 2i)x_1 + (-2 + i)x_2 + (1 + 5i)x_3 + (-6 + 2i)x_4 &= 0 \\ -2i x_1 + 2x_2 + (5 - 4i)x_3 + (9 + 5i)x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3i x_2 + (6 + 2i)x_3 + (-2 + 8i)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung 8:

Wir bringen zuerst die zugehörige Matrix in die reduzierte Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & i & 2+i & -1+3i & z_2 \leftarrow z_2 - (1+2i)z_1 \\ 1+2i & -2+i & 1+5i & -6+2i & z_3 \leftarrow z_3 + 2iz_1 \\ -2i & 2 & 5-4i & 9+5i & z_4 \leftarrow z_4 - 3z_1 \\ 3 & 3i & 6+2i & -2+8i & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & i & 2+i & -1+3i & z_1 \leftarrow z_1 - (2+i)z_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1+i & z_3 \leftarrow z_3 - 3z_2 \\ 0 & 0 & 3 & 3+3i & z_4 \leftarrow z_4 + iz_2 \\ 0 & 0 & -i & 1-i & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & i & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Somit müssen wir nur das folgende homogene Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + i x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_3 + (1 + i)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge davon ist

$$\text{span} \left\{ \left(\begin{array}{c} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1-i \\ 1 \end{array} \right) \right\}.$$