Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 4
25.11.2009

Lineare Algebra I

Lösung 4.1:

Voraussetzung: Sei G eine abelsche Gruppe.

Behauptung: Die Zuordnungen

$$\equiv \;\longmapsto\; \overline{0} \quad \text{und} \quad H \longmapsto \equiv_H$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge der Kongruenzrelationen auf G und der Menge der Untergruppen von G.

Beweis: Dies wird in folgenden Schritten gezeigt:

(a) Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G, so ist $\overline{0}$ eine Untergruppe von G.

(b) Ist H eine Untergruppe von G, so ist $\equiv_H$ eine Kongruenzrelation auf G.

(c) Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G, so stimmt $\equiv$ mit $\equiv_{\overline{0}}$ überein.

(d) Ist H eine Untergruppe von G, so ist $H = \overline{0}^H$.

Wir beweisen nun diese vier Aussagen:

(a) Das wurde schon in der Vorlesung gezeigt (Proposition in §2.3).

(b) Sei H eine Untergruppe von G, und seien $a, b \in G$. Laut Definition gilt $a \equiv_H b$ genau dann, wenn $b - a \in H$.
Wir zeigen zuerst, dass $\equiv_H$ eine Äquivalenzrelation auf G ist, und verwenden dafür die Untergruppeneigenschaften von H. Seien dazu $a, b, c \in G$. Es gilt $a - a = 0 \in H$, also ist $\equiv_H$ reflexiv. Weiter folgt aus $b - a \in H$ auch $a - b = -(b - a) \in H$. Somit ist $\equiv_H$ symmetrisch. Gilt nun $b - a \in H$ und $c - b \in H$, so auch $c - a = (c - b) + (b - a) \in H$. Daher ist $\equiv_H$ auch transitiv. Insgesamt haben ist $\equiv_H$ eine Äquivalenzrelation auf G.
Es bleibt zu zeigen, dass $\equiv_H$ auch eine Kongruenzrelation auf G ist. Seien dafür $a, a', b, b' \in G$ mit $a' - a \in H$ und $b' - b \in H$. Dann gilt $(a' + b') - (a + b) = a' + b' - a - b = (a' - a) + (b' - b) \in H$, da H eine abelsche Gruppe ist. Damit haben wir alles gezeigt.

(c) Sei $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G. Wir wissen schon, dass dann $\overline{0}$ eine Untergruppe von G ist. Sind also $a, b \in G$, so gilt genau dann $a \equiv_{\overline{0}} b$, wenn $b - a \in \overline{0}$ ist. Dies ist aber nach Definition von $\overline{0}$ gleichbedeutend mit $b - a \equiv 0$. Da $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G ist, gilt insbesondere $a \equiv a$, und damit $(b - a) + a \equiv 0 + a$. Also gilt $b \equiv a$ und, wegen der Symmetrie von $\equiv$, auch $a \equiv b$. Andererseits folgt aus $a \equiv b$ auch $a - a \equiv b - a$, weil $-a \equiv -a$ gilt. Somit folgt daraus auch $b - a \equiv 0$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass $a \equiv_{\overline{0}} b$ genau dann gilt, wenn $a \equiv b$ gilt. Also sind die beiden Relationen gleich.

(d) Wir zeigen, dass (d) schon aus (c) folgt. Sei H eine Untergruppe von G. Aus (b) folgt, dass $\equiv_H$ eine Kongruenzrelation auf G ist. Somit folgt aus (c), dass $\equiv_H$ mit $\equiv_{\overline{0}^H}$ überein stimmt. Das heißt für alle $a \in G$ gilt:

$$a \in H \iff 0 \equiv_H a \iff 0 \equiv_{\overline{0}^H} a \iff a \in \overline{0}^H.$$

Mit anderen Worten: $H = \overline{0}^H$.

Eine Bemerkung; Wir hätten auch erst Teil (d) ohne Teil (c) beweisen und daraus Teil (c) folgern können: Sei $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf G. Dann ist nach (a) $\overline{0}$ eine Untergruppe von G. Es gilt also mit (d), dass $\overline{0} = \overline{0}^{\overline{0}}$. Seien nun $a, b \in G$. Dann gilt:

$$a \equiv b \iff b - a \equiv 0 \iff b - a \in \overline{0} \iff b - a \in \overline{0}^{\overline{0}} \iff b - a \equiv_{\overline{0}} 0 \iff a \equiv_{\overline{0}} b.$$

Also stimmen $\equiv$ und $\equiv_{\overline{0}}$ überein.

Lösung 4.2:

Voraussetzung: Seien G und H abelsche Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Behauptung: Die durch

$$a \equiv_f b :\iff f(a) = f(b) \qquad (a, b \in G)$$

auf G definierte Relation $\equiv_f$ ist eine Kongruenzrelation auf G.
Beweis: Aus Aufgabe 2.3 (b) wissen wir schon, dass $\equiv_f$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir müssen also nur noch für alle $a, a', b, b' \in G$ zeigen, dass $a + b \equiv_f a' + b'$, falls $a \equiv_f a'$ und $b \equiv_f b'$. In der Tat ist $f(a+b) = f(a) + f(b) = f(a') + f(b') = f(a'+b')$. Das zweite Gleichheitszeichen gilt, da $a \equiv_f a'$ und $b \equiv_f b'$ ist. Wegen $f(a+b) = f(a'+b')$ ist auch $a + b \equiv_f a' + b'$, und damit $\equiv_f$ eine Kongruenzrelation auf G.

(b) Behauptung: Die Menge $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = 0\}$ ist eine Untergruppe von G.
Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\ker f$ eine Teilmenge von G ist, die abgeschlossen unter Addition und Inversenbildung ist und darüberhinaus die 0 enthält.
Direkt nach Definition gilt $\ker f \subseteq G$. Seien nun $a, b \in \ker f$, so ist $f(a+b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$, also ist auch $a + b \in \ker f$. Sei $x \in G$ ein beliebiges Element, so ist $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$. Man erkennt daraus, dass $f(0)$ die Eigenschaft eines neutralen Elements in H hat, also dass $f(0_G) = 0_H$ ist. Damit ist $0 \in \ker f$. Ist nun $a \in G$, so ist $0_H = f(0_G) = f(a - a) = f(a) + f(-a)$. Daher ist $f(-a) = -f(a)$. Insbesondere gilt $f(-a) = -f(a) = -0 = 0$, falls $a \in \ker f$ ist. Also enthält $\ker f$ zu jedem Element a auch sein inverses Element $-a$. Damit ist gezeigt, dass $\ker f$ eine Untergruppe von G ist.

(c) Behauptung: Die von $\ker f$ gegebene Kongruenzrelation $\equiv_{\ker f}$ stimmt mit $\equiv_f$ überein.
Beweis: Es muss gezeigt werden, dass für alle $a, b \in G$

$$a \equiv_f b \iff a \equiv_{\ker f} b$$

gilt. Es ist

$$\begin{aligned} a \equiv_f b &\iff f(a) = f(b) \\ &\iff f(a) - f(b) = 0 \\ &\iff f(a) + f(-b) = 0 \qquad \text{(wir benutzen } f(-x) = f(x)\text{, was wir oben gezeigt haben)} \\ &\iff f(a-b) = 0 \\ &\iff (a-b) \in \ker f \\ &\iff a \equiv_{\ker f} b. \end{aligned}$$

(d) Behauptung: Es gilt $\overline{0}^{f} = \ker f$.
Beweis: Das sieht man sofort mit der vorherigen Teilaufgabe und Aufgabe 4.1 (d). Man kann es aber auch direkt beweisen, indem man beide Inklusionen zeigt:
"$\subseteq$:" Sei $x \in \overline{0}^{f}$.
Dann ist $x \equiv_f 0$, woraus $f(x) = f(0) = 0$ folgt. Also ist $x \in \ker f$.

"$\supseteq$:" Sei $y \in \ker f$.
Dann ist $f(y) = f(y - 0) = 0 = f(0)$. Also ist $y \equiv_f 0$, woraus $y \in \overline{0}^{f}$ folgt.

(e) Behauptung: Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ ist.
Beweis: Wir zeigen beide Implikationen.
Ist f injektiv, so ist $\ker f = \{0\}$, denn wir haben oben gesehen, das 0 stets in $\ker f$ liegt. Auf der anderen Seite kann kein weiteres, von 0 verschiedenes Element in $\ker f$ liegen, da sonst 0_H mehr als ein Urbild hätte.
Sei nun $\ker f = \{0\}$. Ist $f(a) = f(b)$, so folgt $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0$. Somit ist $a - b \in \ker f$. Nach Voraussetzung muss daher $a - b = 0$ sein, woraus $a = b$ folgt. Daher ist f injektiv.

Lösung 4.3:

Wir führen den Beweis des Homomorphiesatzes aus der Vorlesung fort. Eine Bemerkung vorab: Leider hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen. Anstatt $\overline{f}(\ \overline{a}^f)$ sollte es natürlich $\overline{f}(\ \overline{a}^I)$ heißen.

Voraussetzung: Seien G und H abelsche Gruppen, sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, und sei I eine Untergruppe von G mit $I \subseteq \ker f$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es es genau eine Abbildung

$$\overline{f}\colon G/I \longrightarrow H$$

mit $\overline{f}(\ \overline{a}^I) = f(a)$ für alle $a \in G$ gibt.

(a) Behauptung: $\overline{f}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
Beweis: Seien $\overline{x}^I,\ \overline{y}^I \in G/I$. Dann ist $\overline{f}(\ \overline{x}^I + \overline{x}^I) = \overline{f}(\ \overline{x+y}^I) = f(x+y) = f(x)+f(y) = \overline{f}(\ \overline{x}^I) + \overline{f}(\ \overline{y}^I)$. Damit ist gezeigt, dass $\overline{f}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Behauptung: Es ist $\operatorname{im} f = \operatorname{im} \overline{f}$.
Beweis: Wir zeigen beide Inklusionen. Ist $x \in \operatorname{im}(f)$, so gibt es ein $y \in G$ mit $f(y) = x$. Dann ist $\overline{f}(\ \overline{y}^I) = f(y) = x$. Also ist $x \in \operatorname{im}(\overline{f})$. Sei umgekehrt $x \in \operatorname{im}(\overline{f})$. Dann gibt es eine Äquivalenzklasse $\overline{y}^I \in G/I$ mit $\overline{f}(\overline{y}^I) = x$. Sei nun $y \in \overline{y}^I \subseteq G$ ein Vertreter dieser Äquivalenzklasse. Dann ist $f(y) = \overline{f}(\overline{y}^I) = x$. Also ist $x \in \operatorname{im}(f)$.

(c) Behauptung: Die Abbildung $\overline{f}$ ist genau dann injektiv, wenn $I = \ker f$ ist.
Beweis: Wir zeigen beide Implikationen.
Sei $\overline{f}$ injektiv. Nach Aufgabe 4.2 (e) ist dann $\ker \overline{f} = \{\ \overline{0}^I\}$. Sei nun $x \in \ker f$. Dann ist $\overline{x}^I \in \ker \overline{f} = \{\ \overline{0}^I\}$, d.h. $\overline{x}^I = \overline{0}^I$, also $x \in \overline{0}^I$. Somit muss $\ker f \subseteq \overline{0}^I = I$ sein. Nach Voraussetzung ist aber auch $I \subseteq \ker f$. Daher folgt $I = \ker f$.
Sei umgekehrt $\ker f = I = \overline{0}^I$ (Aufgabe 4.1 (d)). Wir untersuchen $\ker \overline{f}$. Ist für $x \in G$ die Kongruenzklasse $\overline{x}^I \in \ker \overline{f}$, so ist $\overline{f}(\ \overline{x}^I) = f(x) = 0$. Also ist $x \in \ker f = \overline{0}^I$. Dies bedeutet aber, dass $\overline{x}^I = \overline{0}^I$ ist. Also ist $\ker \overline{f} = \{\ \overline{0}^I\}$. Nach Aufgabe 4.2 (e) ist $\overline{f}$ injektiv.

(d) Behauptung: Die Abbildung $\overline{f}$ ist genau dann surjektiv, wenn f surjektiv ist.
Beweis: Es ist mit Teilaufgabe (b)

$$\begin{aligned} f \text{ surjektiv} &\Longleftrightarrow \operatorname{im}(f) = H \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{im}(\overline{f}) = H \\ &\Longleftrightarrow \overline{f} \ \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Ist nun f surjektiv und $\ker f = I$, so sagen uns die beiden Teilaufgaben (c) und (d), dass $\overline{f}$ bijektiv ist. Mit Teilaufgabe (a) folgt dann, dass $\overline{f}$ ein Isomorphismus ist. Das liefert uns also den Isomorphiesatz für abelsche Gruppen.

Lösung 4.4:

(a) Voraussetzung: Sei A eine Menge, und sei B eine Teilmenge von A. Wir betrachten die Gruppe $(\mathcal{P}(A), \triangle)$.

Behauptung: $\mathcal{P}(B)$ ist eine Untergruppe von $\mathcal{P}(A)$ und die Gruppe $\mathcal{P}(A)/\mathcal{P}$ ist isomorph zu der Gruppe $\mathcal{P}(A \setminus B)$.

Beweis: Die Abbildung $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $C \mapsto C \cap (A \setminus B)$, ist ein Gruppenhomomorphismus (vgl. Lösung von Aufgabe 3.4 (e)). Der Kern dieser Abbildung enthält genau die Teilmengen C von A, für die $C \cap (A \setminus B) = \varnothing$ gilt. Das sind aber genau die Teilmengen von A, die im Komplement von $A \setminus B$ in A enthalten sind. Es gilt aber $A \setminus (A \setminus B) = B$: Sei $a \in A \setminus (A \setminus B)$. Dann ist a also in A, aber nicht in $A \setminus B$. Damit muss aber $a \in B$ gelten. Sei nun $a \in B$. Dann gilt $a \notin A \setminus B$, also $a \in A \setminus (A \setminus B)$.

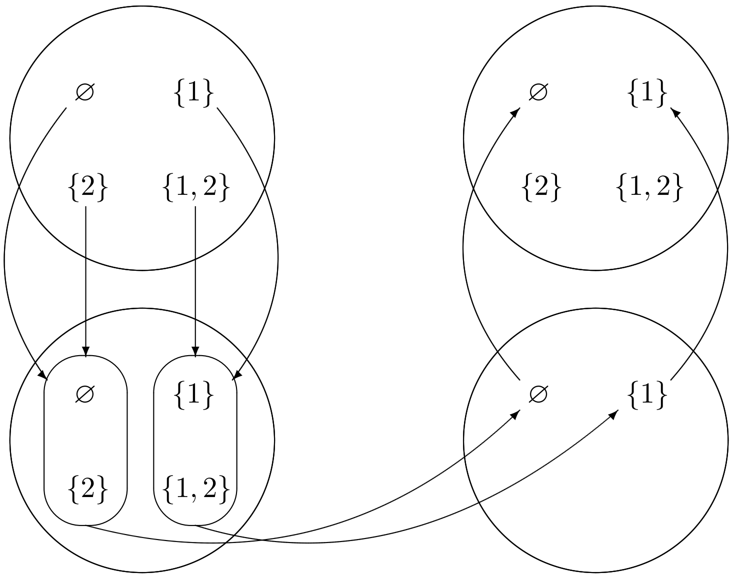
Somit haben wir gezeigt, dass $\ker f = \mathcal{P}(B)$. Nach Aufgabe 4.2 (b) ist $\mathcal{P}(B)$ damit eine Untergruppe von $\mathcal{P}(A)$. Außerdem gilt, dass das Bild von f die Menge $\mathcal{P}(A \setminus B)$ ist: Offensichtlich ist nämlich $C \cap (A \setminus B) \subseteq A \setminus B$. Ist C nun eine beliebige Teilmenge von $A \setminus B$, so ist $f(C) = C$.

Nach dem Isomorphiesatz gilt also $\mathcal{P}(A)/\mathcal{P}(B) \cong \mathcal{P}(A \setminus B)$.

Seien nun $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2\}$. Dann ist $A \setminus B = \{1\}$.

Es gilt $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{2\}\}$ und $\mathcal{P}(A \setminus B) = \{\varnothing, \{1\}\}$.

Wir berechnen zuerst die einzelnen Kongruenzklassen von $\equiv_{\mathcal{P}(B)}$. Die Kongruenzklasse einer Teilmenge C von A besteht aus allen Teilmengen D von A, für die $C - D \in \mathcal{P}(B)$, also $C \triangle D \subseteq B$, gilt. Es gilt genau dann $\varnothing \triangle D \subseteq D$, wenn $D \subseteq B$ ist. Also ist die Kongruenzklasse der leeren Menge $\varnothing$ gerade $\{\varnothing, \{2\}\}$. Nun müssen wir nur noch Teilmengen von A betrachten, die nicht in dieser Kongruenzklasse liegen. Es gilt $\{1\} \triangle D \subseteq B$ genau dann, wenn $(\{1\} \cup D) \setminus (\{1\} \cap D) \subseteq B$ gilt. Die Kongruenzklasse von $\{1\}$ ist also $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$, denn $(\{1\} \cup \{1, 2\}) \setminus (\{1\} \cap \{1, 2\}) = \{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} = B$. Die Aussage des Isomorphiesatzes lässt sich graphisch nun wie folgt ausdrücken.



(b) Sei $\equiv\, := \,\equiv_{\langle 6 \rangle}$. Dann ist $G := \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$. Zunachst gibt es die trivialen Untergruppen $H_1 := \{\overline{0}\}$ und $H_4 := \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle = \langle \overline{1} \rangle = \langle \overline{5} \rangle$ mit Quotientengruppen $G/H_1 = \{\{\overline{0}\}, \{\overline{1}\}, \{\overline{2}\}, \{\overline{3}\}, \{\overline{4}\}, \{\overline{5}\}\} \cong \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$ und $G/H_4 = \{\{\overline{0}\}\} \cong \{0\}$.

Betrachten wir nun die von $\overline{2}$ bzw. $\overline{4}$ erzeugte Untergruppe $H_2 := \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$. Die Quotientengruppe G/H_2 besteht aus den zwei Klassen H_2 und $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$. Somit ist G/H_2 isomorph zu $\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, wie jede Gruppe mit genau zwei Elementen.

Sei jetzt $H_3 = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ die von $\overline{3}$ erzeugte Untergruppe. Dann besteht G/H_3 aus den Klassen H_3, $\{\overline{1}, \overline{4}\}$ und $\{\overline{2}, \overline{5}\}$. Dies ist also eine Gruppe mit drei Elementen, und auch da gibt es bis auf Isomorphie nur eine: $\mathbb{Z}/\langle 3 \rangle$.

(c) (i) Behauptung: Durch

$$(a,b) \equiv (c,d) :\iff a+d=b+c \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{Z})$$

wird eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert. Die Kongruenzklasse von $(0,0)$ ist $\{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis: Das Überprüfen der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation geht wie in Aufgabe 2.4 (b) (vii). Zu zeigen bleibt noch das $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist. Seien dafür $(a,b),(a',b'),(c,d),(c',d') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(a,b) \equiv (a',b')$ und $(c,d) \equiv (c',d')$. Das heißt $a+b' = a'+b$ und $c+d' = c'+d$. Dann gilt:

$$(a+c)+(b'+d') = a+b'+c+d' = a'+b+c'+d = (a'+c')+(b+d),$$

also $(a,b)+(c,d) \equiv (a',b')+(c',d')$.

Die Kongruenzklasse von $\overline{(0,0)}$ besteht aus allen Elementen $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $a = a+0 = b+0 = b$, also ist $\overline{(0,0)} = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) Behauptung: In jeder Kongruenzklasse liegt ein Element aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und somit sind die Mengen $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\equiv$ und $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\equiv$ gleich.

Beweis: Sei $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ist $a \leq b$, so gilt wegen (i) $(a,b) \equiv (a,b)+(0,0) \equiv (a,b)+(-a+1,-a+1) = (1, b-a+1)$. Da 1 und $b-a+1$ in $\mathbb{N}$ liegen $(a \leq b)$, sind wir in diesem Fall fertig. Analog behandelt man den Fall $a \geq b$. Man sieht hier außerdem, dass jedes Element in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kongruent zu einem Element der Form $(0,n)$ oder $(n,0)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

(iii) Behauptung: Die Quotientengruppe $\overline{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $f\colon (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\equiv \to \mathbb{Z}$ mit $\overline{(a,b)} \mapsto a-b$. Dann ist f ein Isomorphismus von Gruppen. f ist eine Abbildung, da für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ offensichtlich $a-b \in \mathbb{Z}$ gilt und aus $(a,b) \equiv (c,d)$ ja $a-b = a-b+d-d = b+c-b-d = c-d$ folgt. Außerdem gilt für alle $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$f(\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}) = f(\overline{(a+c,b+d)}) = a+c-b-d = (a-b)+(c-d) = f(\overline{(a,b)})+f(\overline{(c,d)}).$$

(d) Behauptung: Durch

$$x \sim y :\iff \text{es existieren } n,m \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = y^m$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, die keine Kongruenzrelation auf der multiplikativen abelschen Gruppe $\mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Beweis: Die Relation $\sim$ ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Seien nun $x,y,z \in \mathbb{R}^\times$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Es gibt also $n,m,k,l \in \mathbb{N}$ mit $x^n = y^m$ und $y^k = z^l$. Dann gilt

$$x^{nk} = (x^n)^k = (y^m)^k = y^{mk} = (y^k)^m = (z^l)^m = z^{lm},$$

also $x \sim y$. Um zu sehen, dass $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $\mathbb{R}^\times$ ist, nehmen wir $x=2$, $x'=8$, $y=3$ und $y'=9$. Es gilt offensichtlich $x \sim x'$ und $y \sim y'$, aber es gilt nicht $xy \sim x'y'$: Es ist $xy = 2 \cdot 3 = 6$, also kommen in jeder Potenz von 6 die Zahlen 2 und 3 gleich oft als Faktoren vor. Da aber $x'y' = 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, tritt in jeder Potenz von 72 die 2 häufiger als die 3 als Faktor auf.

(e) Man kann die zweite Zeile des Reims als $1 = 10$ und die zwölfte Zeile als $10 = 0$ lesen, zusammengenommen also als $1 = 0$. Somit kann man den Reim als Rechnung modulo 1, also in $\mathbb{Z}/\langle 1 \rangle \cong \{0\}$, verstehen. Ändert man z.B. die zweite Zeile in *Aus Eins mach Dreizehn* um, so kann man den neu entstandenen Reim als Rechnen modulo 2, also in $\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, verstehen.