

Lineare Algebra I

Lösung 10.1:

Voraussetzung: Sei K ein Körper.

- (a) Behauptung: Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, also ist $K^{n \times n}$ zusammen mit der Matrizenaddition und dem Matrizenprodukt kein kommutativer Ring.

Beweis: Es ist z.B. über jedem Körper K

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) (i) Sei $K = \mathbb{F}_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Sei $K = \mathbb{F}_5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Voraussetzung: Seien $A, B \in K^{n \times n}$ schwache magische Quadrate (vgl. Aufgabe 9.12).
 Behauptung: Dann ist auch AB ein schwaches magisches Quadrat mit Zeilen-/Spaltensumme $s(AB) = s(A)s(B)$.

Beweis: Seien $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Dann ist

$$AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n} =: (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Betrachten wir zuerst die Zeilensummen von AB . Sei $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^n b_{kj}}_{=s(B)} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \right)}_{=s(A)} s(B) = s(A)s(B).$$

Nun betrachten wir die Spaltensummen von AB . Sei dafür $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ik}}_{=s(A)} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n b_{kj} \right)}_{=s(B)} s(A) = s(A)s(B).$$

Aufgabe 10.2:

Voraussetzung: Sei K ein Körper. Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n \times n}$ heißt $A^T := (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$ die zu A **transponierte Matrix**. Seien nun $A, B \in K^{n \times n}$.

(a) Behauptung: $(AB)^T = B^T A^T$.

Beweis: Seien $a'_{ij} := a_{ji}$ und $b'_{ij} := b_{ji}$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $A^T = (a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ und $B^T = (b'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Weiter gilt

$$(AB)^T = \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{ki} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = B^T A^T.$$

(b) Behauptung: Ist A invertierbar, so auch A^T , und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: Sei A invertierbar mit Inversem A^{-1} . Dann ist nach Teilaufgabe (a) $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$ und $A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$.

(c) Behauptung: Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ invertierbar und gilt $A^{-1} = A^T$, so ist $A' := (a_{ij}^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ ein schwaches magisches Quadrat mit Zeilen-/Spaltensumme $s(A') = 1$ (vgl. Aufgabe 9.12).

Beweis: Sei A invertierbar mit Inversem A^T . Dann bedeutet $AA^T = I_n$ u.a., dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$1 = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$$

gilt. D.h. die Zeilensummen von A' sind alle 1. Außerdem bedeutet $A^T A = I_n$ u.a., dass für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$1 = \sum_{k=1}^n a_{kj} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}^2$$

gilt. Also sind auch alle Spaltensummen von A' gleich 1.

Lösung 10.3:

Wir berechnen die Lösung durch Umformung der erweiterten Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & -2 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 & 5 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} z_2 \leftarrow z_2 - 3z_1 \\ z_3 \leftarrow z_3 - 8z_1 \\ z_4 \leftarrow z_4 - 2z_1 \\ z_5 \leftarrow z_5 - 6z_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 6 & -2 & 22 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 16 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} z_3 \leftarrow z_3 - 2z_2 \\ z_4 \leftarrow z_4 - z_2 \\ z_5 \leftarrow z_5 - z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

Man erkennt, dass dieses System keine Lösung über \mathbb{Q} besitzt. Alle Rechenschritte, die bis jetzt durchgeführt wurden, sind auch über dem Körper \mathbb{F}_5 durchführbar. Um also die

Lösung in \mathbb{F}_5 zu bestimmen rechnen wir einfach weiter. Das System geht dann über in

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nachdem wir die reduzierte Zeilenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

hergestellt haben können wir die Lösung ablesen. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 10.4:

Voraussetzung: Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Beweis: Wir wissen, dass eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ durch die Bilder von f auf einer Basis von V schon auf ganz V festgelegt ist. Umgekehrt kann man die Bilder auf einer Basis von V beliebig vorgeben und erhält durch lineare Erweiterung eine lineare Abbildung (vgl. Aufgabe 9.5 (e)). Daher genügt es zu zeigen, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis von \mathbb{R}^4 ist. Man prüft auf lineare Abhängigkeit indem man das homogene System

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

löst. Dieses lässt sich auf Diagonalgestalt bringen mit Diagonaleinträgen ungleich 0, daher ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig und somit aus Dimensionsgründen eine Basis. Insbesondere existiert genau eine lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Behauptung: f ist nicht injektiv aber surjektiv.

Beweis: Sicherlich ist f surjektiv, denn schon $\{w_2, w_3\}$ erzeugen \mathbb{R}^2 . Die Abbildung ist nicht injektiv, denn es ist $f(v_1 - v_2 + v_3) = 0$, damit ist $\ker f \neq (0)$.

Somit liegt auch das Element

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im Bild von f . Wir bestimmen nun alle Urbilder von z . Dafür betrachten wir die Abbildungsmatrix bezüglich (v_1, v_2, v_3, v_4) und der Standardbasis des \mathbb{R}^2 und lösen das inhomogene System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \quad z_2 \leftarrow z_2 + z_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z_1 \leftarrow z_1 - z_2 \\ z_2 \leftarrow \frac{1}{2}z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 & | & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Damit kann man alle Urbilder beschreiben durch

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 10.5:

Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}[X]_3$. Seien $\underline{v} = (1, X, X^2, X^3)$ und $\underline{w} = (1, X-1, X^2-2X+1, -X^3+3X^2-3X+1)$. Wir definieren

$$f: \mathbb{R}[X]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_3,$$

$$\sum_{i=0}^3 a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^3 a_i (2X-1)^i \quad (a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}).$$

(a) Behauptung: f ist eine lineare Abbildung.

Beweis: Seien $p = \sum_{i=0}^3 a_i X^i, q = \sum_{j=0}^3 b_j X^j \in \mathbb{R}[X]_3, \lambda \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\begin{aligned} f(p+q) &= f\left(\sum_{i=0}^3 (a_i + b_i) X^i\right) = \sum_{i=0}^3 (a_i + b_i) (2X-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^3 a_i (2X-1)^i + \sum_{i=0}^3 b_i (2X-1)^i = f(p) + f(q), \end{aligned}$$

sowie

$$f(\lambda p) = f\left(\sum_{i=0}^3 \lambda a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^3 \lambda a_i (2X-1)^i = \lambda \sum_{i=0}^3 a_i (2X-1)^i = \lambda f(p).$$

Dies zeigt, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Behauptung: \underline{v} und \underline{w} sind Basen von $\mathbb{R}[X]_3$.

Beweis: Sicherlich erzeugt \underline{v} den $\mathbb{R}[X]_3$ und nach Definition ist \underline{v} auch linear unabhängig. Da \underline{w} vier Elemente hat genügt es aus Dimensionsgründen, zu zeigen, dass \underline{w} linear unabhängig ist. Angenommen es gibt $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, 2, 3$ mit

$$\lambda_0 + \lambda_1(X - 1) + \lambda_2(X^2 + 2X + 1) + \lambda_3(-X^3 + 3X^2 - 3X + 1) = 0.$$

Da X^3 nur im letzten Summand auftaucht, muss $\lambda_3 = 0$ sein. Analog argumentiert man nacheinander mit λ_2 und X^2 , dann mit λ_1 und X . Man erhält schließlich, dass $\lambda_i = 0$ ist für $i = 0, 1, 2, 3$. Also ist \underline{w} eine Basis von $\mathbb{R}[X]_3$.

(c) Wir berechnen die Bilder von \underline{v} unter der Abbildung f und erhalten

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(X) &= 2X - 1 \\ f(X^2) &= (2X - 1)^2 = 4X^2 - 4X + 1 \\ f(X^3) &= (2X - 1)^3 = 8X^3 - 12X^2 + 6X - 1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$M(f, \underline{v}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(d) Zuerst bestimmen wir $M(\text{id}, \underline{w}, \underline{v})$. Dazu müssen wir die Basisvektoren von \underline{w} als Linearkombinationen der Elemente aus \underline{v} schreiben. Dies aber schon geschehen und wir können die Matrix sofort hinschreiben. Es ist

$$M(\text{id}, \underline{w}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Um $M(\text{id}, \underline{v}, \underline{w})$ zu bestimmen müssen wir umgekehrt die Elemente von \underline{v} durch Linearkombinationen der Elemente von \underline{w} ausdrücken. Alternativ könnte man auch die Inverse der Matrix $M(\text{id}, \underline{w}, \underline{v})$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ X &= (X - 1) + 1 \\ X^2 &= (X^2 - 2X + 1) + 2(X - 1) + 1 \\ X^3 &= -(-X^3 + 3X^2 - 3X + 1) + 3(X^2 - 2X + 1) + 3(X - 1) + 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$M(\text{id}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) Es ist

$$M(f, \underline{w}, \underline{w}) = M(\text{id}, \underline{v}, \underline{w}) \cdot M(f, \underline{v}, \underline{v}) \cdot M(\text{id}, \underline{w}, \underline{v}).$$

Man rechnet also

$$\begin{aligned}
 M(f, \underline{w}, \underline{w}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Um die Matrix $M(f, \underline{w}, \underline{w})$ direkt zu bestimmen, schreiben wir die Bilder von \underline{w} unter f als Linearkombinationen der Basis \underline{w} . Es ist

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 1 & = 1 \\
 f(X-1) &= 2X-2 & = 2(X-1) \\
 f(X^2-2X+1) &= 4X^2-8X+4 & = 4(X^2-2X+1) \\
 f(-X^3+3X^2-3X+1) &= -8X^3+24X^2-24X+8 & = 8(-X^3+3X^2-3X+1).
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich auch hier

$$M(f, \underline{w}, \underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (f) Um ein Urbild von $p := f(q) = -X^3 + 40X^2 - 12X + 9$ zu finden, lösen wir das zugehörige inhomogene System, das durch eine der Darstellungsmatrizen gegeben ist. Dabei muss man jedoch immer auf die Basiswahl achten. Möchte man mit $M(f, \underline{w}, \underline{w})$ arbeiten, so muss man zuerst die Koeffizienten von p bezüglich der Basis \underline{w} bestimmen und die Lösung des Systems sind erneut Koeffizienten bezüglich der Basis \underline{w} . Analoges gilt für die Basis \underline{v} . Wir entscheiden uns, das System bezüglich \underline{w} zu lösen. Dazu müssen wir zuerst die Koeffizienten von p bezüglich \underline{w} bestimmen. Dies ist wegen der "Stufenform" von \underline{w} relativ einfach. Wir erhalten

$$p = 8(-X^3 + 3X^2 - 3X + 1) + 16(X^2 - 2X + 1) + 44(X - 1) + 29$$

Daher lösen wir das inhomogene System

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right)$$

Wir erhalten die Lösung $(29, 22, 4, 1)$ als Koeffizienten bezüglich \underline{w} . Damit ist die Lösung

$$q = 29 + 22(X-1) + 4(X^2-2X+1) + (-X^3+3X^2-3X+1) = -X^3 + 7X^2 + 11X + 12.$$