Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 7
30.11.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 7.1:

(a) Sei K ein beliebiger Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow K, \quad n \longmapsto \begin{cases} \underbrace{1+\cdots+1}_{n-\text{mal}} & \text{falls } n>0 \\ \underbrace{(-1)+\cdots+(-1)}_{n-\text{mal}} & \text{falls } n<0 \\ 0 & \text{falls } n=0 \end{cases}$$

ein Ringhomomorphismus ist. Zeigen Sie darüberhinaus, dass φ der einzige Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow K$ ist. Es hat sich etabliert, einfach nur n anstatt $\varphi(n)$ zu schreiben. Das bedeutet, dass man jede ganze Zahl als ein Element des Körpers K auffassen kann.

(b) Kann dieser Ringhomomorphismus (i) injektiv aber nicht surjektiv, (ii) surjektiv aber nicht injektiv (iii) injektiv und surjektiv, (iv) weder injektiv noch surjektiv sein? Geben Sie jeweils ein Beispiel an oder erläutern Sie, warum dies nicht der Fall sein kann.

Aufgabe 7.2:

Bringen Sie folgende Matrizen über dem Körper K erst auf Zeilenstufenform und dann auf reduzierte Zeilenstufenform. Benutzen Sie dafür nur erlaubte Zeilenoperationen. Dokumentieren Sie alle durchgeführten Zeilenoperationen. Die Notation ergibt sich aus der Bemerkung zu Aufgabe 7.1 (a).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & -9 & -1 & 8 \\ 3 & 22 & 17 & 13 & -1 \\ -1 & -14 & -7 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, über $K = \mathbb{Q}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, über $K = \mathbb{F}_5$.

(c) $\begin{pmatrix} 1+\mathring{\imath} & 2 & \mathring{\imath} \\ 2\mathring{\imath} & 1+2\mathring{\imath} & 1 \\ 2 & 1+\mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix}$, über $K = \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\mathring{\imath}]$.

(d) $\begin{pmatrix} 3\mathring{\imath} & 5-2\mathring{\imath} & 4 \\ 1-3\mathring{\imath} & 0 & 2+3\mathring{\imath} \\ 4 & -1-4\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \end{pmatrix}$, über $K = \mathbb{F}_{49} = \mathbb{F}_7[\mathring{\imath}]$.

Bitte wenden.

Aufgabe 7.3:

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über $\mathbb{F}_4$, dem Körper mit 4 Elementen (vgl. Aufgabe 6.2). Wir benutzen die Bezeichnungen $a := \overline{X}$ und $b := \overline{X+1}$.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & b & b \end{pmatrix} x = 0$$

Aufgabe 7.4:

Bringen Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 15 & 3 & 9 & 12 & 2 \\ 5 & -6 & 3 & 3 & -8 \\ 20 & -9 & 6 & 21 & -20 \\ 0 & 6 & 27 & -3 & 56 \end{pmatrix}$$

über den folgenden Körpern auf reduzierte Zeilenstufenform und bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ für $x \in K^5$. (Die Notation entspricht wieder der Bemerkung zur Aufgabe 7.1 (a).)

(a) $K = \mathbb{Q}$

(b) $K = \mathbb{F}_2$

(c) $K = \mathbb{F}_3$

(d) $K = \mathbb{F}_5$

(e) $K = \mathbb{F}_7$

Abgabe bis Montag, den 7. Dezember, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.