LICENCE BIOLOGIE MATHÉMATIQUES 2008-2009

Corrigé de la feuille 1.

1. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2+12 \geq 0}_{\text{pour que la racine existe}}, \underbrace{\sqrt{x^2+12} \neq 0}_{\text{pour qu'on ne divise pas par zéro}}\}$

$= \mathbb{R}$ car $x^2+12 \geq 12 > 0$ et donc $\sqrt{x^2+12} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Comme f est une fonction impaire

$\left(f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^2+12}} = \dfrac{-x^3}{\sqrt{x^2+12}} = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \right),$

on peut restreindre la fonction sur $[0, \infty[$ pour l'étudier.

(b) $D_f = \mathbb{R}$ car $D_{\cos} = D_{\sin} = \mathbb{R}$

Comme cos et sin sont périodiques de période 2π, f l'est aussi

$\big(f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)(\sin(x+2\pi))^2 = (\cos x)(\sin x)^2 = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\big)$ et on peut se restreindre dans un premier temps sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour étudier f. Mais de plus f est une fonction paire $\big(f(-x) = \cos(-x)(\sin(-x))^2 = \cos(x)\,(-\sin(x))^2$
$= \cos(x)\,(\sin x)^2 = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\big)$.

Donc on peut dans un second temps se restreindre sur $[0, \pi]$. Mais la restriction de f sur $[0, \pi]$ a $(\frac{\pi}{2}, 0)$ comme centre de symétrie car

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)+f\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\right)^2$$

$$+\underbrace{\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)\right)}_{=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\Big(\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\Big)^2=0=2\cdot 0$$

Si on veut, on peut donc même prendre $[0,\frac{\pi}{2}]$ comme domaine d'étude.

(c) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid 1+x\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq -1\}$
$=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

On montre que $(-1,-1)$ est centre de symétrie:

$$f(-1-x)+f(-1+x)=\frac{1-(-1-x)}{1+(-1-x)}+\frac{1-(-1+x)}{1+(-1+x)}$$

$$=\frac{2+x}{-x}+\frac{2-x}{x}=-2=2\cdot(-1)$$

On peut donc prendre soit $]-1,\infty[$ soit $]-\infty,-1[$ comme domaine d'étude.

2. On devine $f(1)=0$. Donc $x-1$ se met en facteur. Pour trouver le polynôme g tel que $f(x)=(x-1)\,g(x)$ on effectue une division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-3x-1 & x-1 \\ \hline 4x^3-4x^2 & 4x^2+4x+1 \\ \hline \quad 4x^2-3x-1 & \\ \quad \underline{4x^2-4x} & \\ \qquad\quad x-1 & \\ \qquad\quad \underline{x-1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

On trouve donc $f(x)=(x-1)(4x^2+4x+1)+0$.

Les racines de $4x^2+4x+1$ sont $x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 4}}{8}=-\frac{1}{2}$

(donc seulement une racine qui est double). Donc

$f(x)=0 \iff x\in\{-\frac{1}{2},1\}$.

$f'(x)=12x^2-3$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff 12x^2-3=0 \\ &\iff 4x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On résume dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

$f(\frac{1}{2})=\frac{4}{8}-\frac{3}{2}-1=-2$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = A e^{\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Le taux de croissance au temps t est

$$f'(t) = A \frac{1}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}}.$$

Le taux de croissance au temps τ est donc

$$f'(\tau) = A \frac{1}{\tau} e^{\frac{\tau}{\tau}} = \frac{Ae}{\tau}.$$

4. (a) $$\lim_{x \to \infty} (-2x^2 + 2x + 1) = \lim_{x \to \infty} (-2x^2) = -\infty$$

(b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{-x+1}{3x^2+x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{3 + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 0$$

(c) $$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{t \to \infty} (t^2 - \sqrt{t^2}) = \lim_{t \to \infty} (t^2 - t) = \infty$$

5. (a) $$m(0) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = m_0$$

(b) $$\lim_{v \to c} m(v) = \lim_{v \to c} \frac{m_0}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{1 - \underbrace{\frac{v^2}{c^2}}_{\to 1}}_{\to 0}}}_{\to 0}} = \infty$$

6. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2-1 \neq 0}_{\text{pour qu'on ne divise pas par zéro}},\ \underbrace{x>0}_{\text{pour que } \ln(x) \text{ existe}}\} =]0,1[\, \cup\,]1,\infty[$

<u>limites aux bornes du domaine :</u>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\overset{\to 1}{(x^3+3x+1)}}{\underset{\to -1}{(x^2-1)}}\underset{\to -\infty}{\ln(x)}\right) = \infty$$

C admet donc une asymptote verticale d'équation $x=0$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\overset{\to 5}{(x^3+3x+1)}}{\underset{\to 0^-}{(x^2-1)}}\underset{\to 0}{\ln(x)}\right)$$

$$= 5\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\to 0}{\ln(x)}}{\underset{\to 0}{(x^2-1)}} = 5\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \frac{5}{2}$$

On peut donc prolonger f par continuité en 1 en mettant $f(1)=\frac{5}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\overset{\to\infty}{x} + \overset{\to 0}{\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\overset{\to\infty}{\ln(x)}}{\underset{\to 1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \infty$$

On recherche donc une éventuelle direction asymptotique en étudiant $\frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x+1}{x^3-x}\ln(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}{1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}\ln(x)\right)$$

$$= \infty.$$

Il n'y donc pas de diretion asymptotique
et donc non plus d'asymptote oblique ou horizontale

7. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Sens de variation :

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(3x^2+6x) - (x^3+3x^2-3)\,2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

Limites aux bornes du domaine :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{\to -1}{x^3} + \overset{\to 0}{3x^2 - 3}}{\underbrace{\underset{\to -2}{(x-1)}\,\underset{\to 0^-}{(x+1)}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overset{\to -1}{x^3} + \overset{\to 0}{3x^2 - 3}}{\underbrace{\underset{\to -2}{(x-1)}\,\underset{\to 0^+}{(x+1)}}_{\to 0^-}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^3+3x^2-3}^{\to 1}}{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-}\underbrace{(x+1)}_{\to 2}}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3+3x^2-3}^{\to 1}}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^+}\underbrace{(x+1)}_{\to 2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{\overbrace{x}^{\to\infty}+\overbrace{3-\frac{3}{x^2}}^{\to 3}}{\underbrace{1-\frac{1}{x^2}}_{\to 1}} = \infty$$

<u>directions asymptotiques</u> :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to \infty} 1 = 1$$

Donc le graphe admet comme direction asymptotique la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Est-ce que $y = x$ est même asymptote oblique au graphe ?

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2-3-x^3+x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\overbrace{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 3$$ et de même $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 3$.

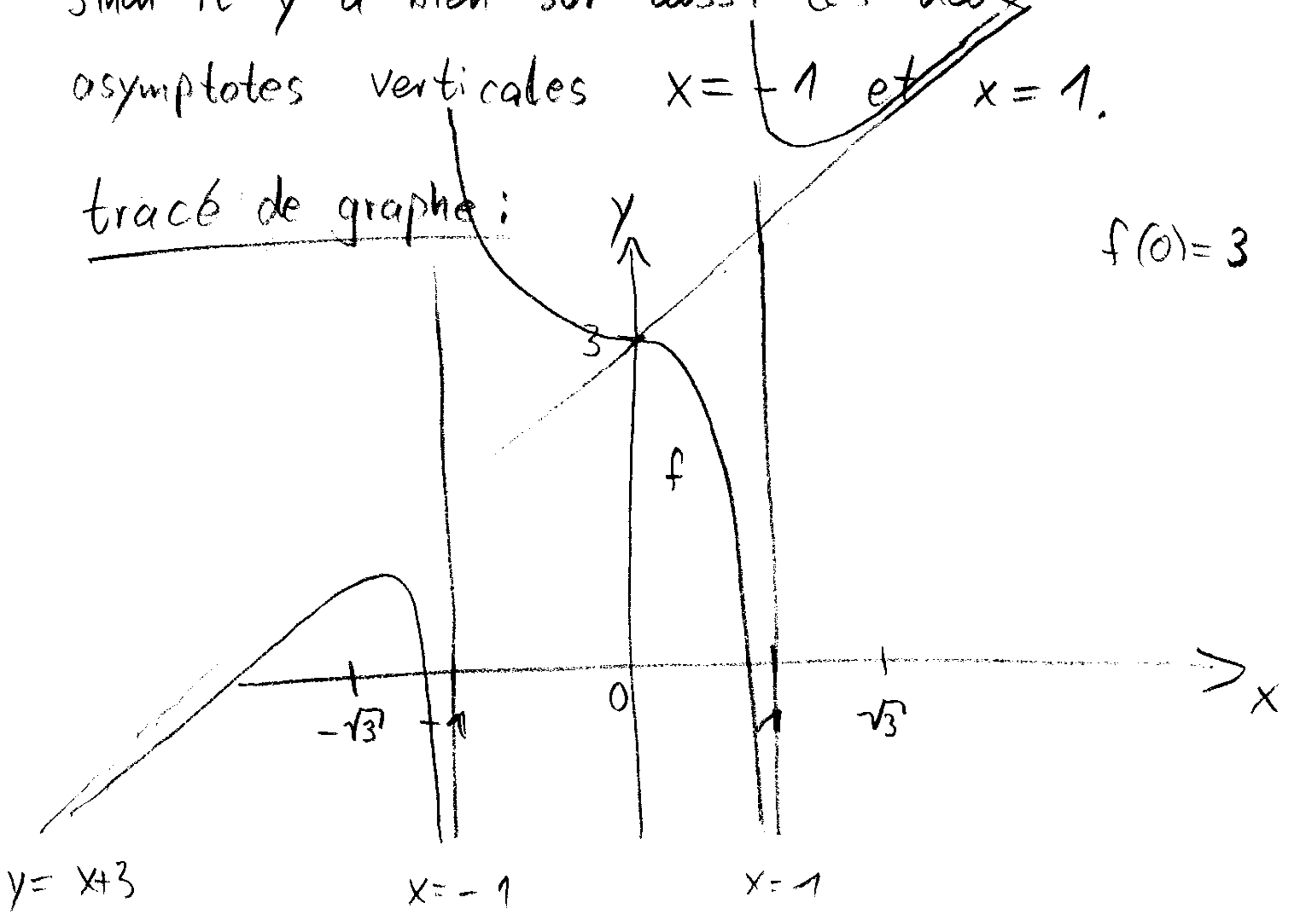
Donc la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique au graphe de f en $\pm\infty$

(car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (x+3)) = 0$).

Sinon il y a bien sûr aussi les deux asymptotes verticales $x = -1$ et $x = 1$.

<u>tracé de graphe :</u>

$f(0) = 3$



8. (a)

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$
$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda T$$
$$-\ln 2 = -\lambda T$$
$$\ln 2 = \lambda T$$
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

d'où $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ et donc

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$
$$= N_0 e^{(\ln 2)\cdot\left(-\frac{t}{T}\right)}$$
$$= N_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}}$$
$$= N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

(b) $2^{-\frac{365}{138}} \approx 0{,}16 = 16\,\%$

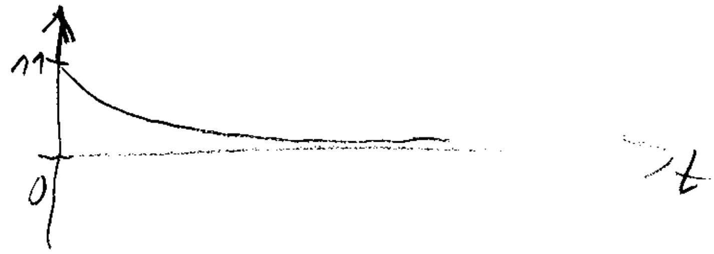
9. (a) $11 = f(0) = Q$

(b) $f'(t) = \underbrace{-\gamma Q}_{>0} \underbrace{e^{-\gamma t}}_{>0} < 0$ pour tout $t \geq 0$

La concentration baisse en accord avec les mesures expérimentales.

(c) $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$

(d)



(e) T ne dépend pas de t car

si $f(0+T) = \frac{f(0)}{3}$ alors

$f(t+T) = \frac{f(t)}{3}$:

En effet, si $Qe^{-\gamma T} = \frac{1}{3} Q e^{-\gamma \cdot 0}$ alors on peut multiplier avec $e^{-\gamma t}$ pour obtenir

$Qe^{-\gamma(t+T)} = \frac{1}{3} Q e^{-\gamma t}$.

On exprime T en fonction de γ:

$f(T) = \frac{f(0)}{3} \Leftrightarrow Qe^{-\gamma T} = \frac{Q}{3} \Leftrightarrow e^{-\gamma T} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -\gamma T = \ln \frac{1}{3} \Leftrightarrow \gamma T = \ln 3 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 3}{\gamma}$

10. $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$

$$f(t) = 6e^{-2e^{-\frac{t}{2}}}$$

$$f'(t) = 6e^{-2e^{-\frac{t}{2}}}(-2)(-\tfrac{1}{2})e^{-\frac{t}{2}}$$

$$= 6e^{-\frac{t}{2}-2e^{-\frac{t}{2}}}$$

$$f''(t) = 6e^{-\frac{t}{2}-2e^{-\frac{t}{2}}}\left(-\tfrac{1}{2}-2(-\tfrac{1}{2})e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

$$= 6e^{-\frac{t}{2}-2e^{-\frac{t}{2}}}\left(e^{-\frac{t}{2}}-\tfrac{1}{2}\right)$$

et donc

$f(t) > 0$, $f'(t) > 0$ pour tout $t \in [0,\infty[$

(car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et

$$f''(t) = 0 \iff e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\iff -\frac{t}{2} = \ln\frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{t}{2} = \ln 2$$

$$\iff t = 2\ln 2$$

$$f''(0) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

donc $f''(t) \geq 0$ pour $t \in [0, 2\ln 2]$

et $f''(t) \leq 0$ pour $t \in [2\ln 2, \infty[$

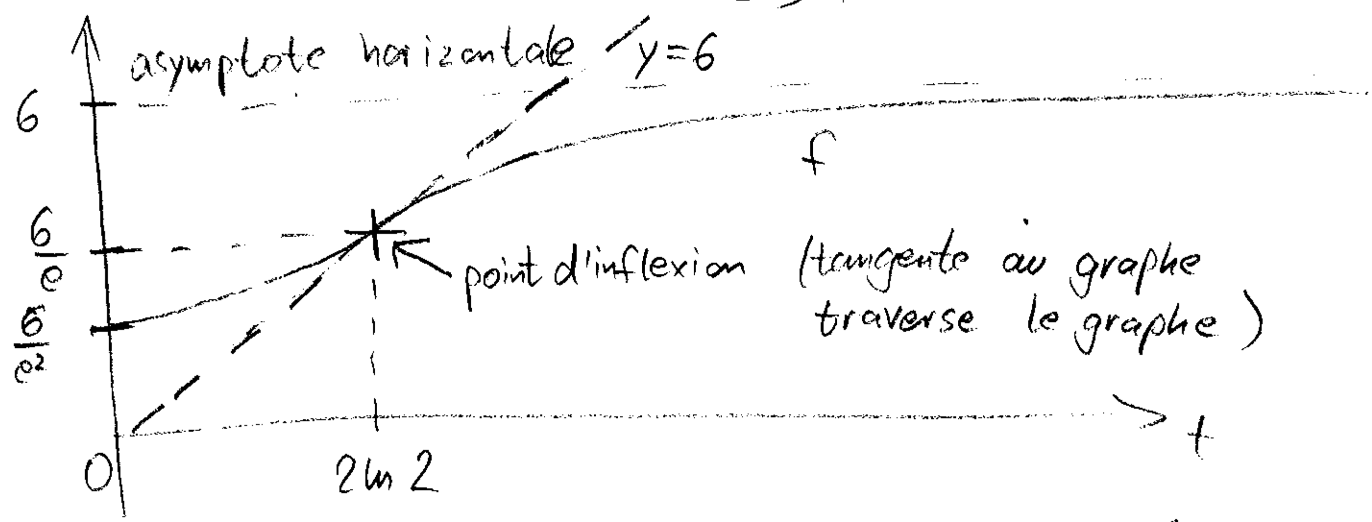
Donc f est convexe sur $[0, 2\ln 2]$

et concave sur $[2\ln 2, \infty[$,

f est strictement croissante.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 6 e^{\overbrace{-2e^{-\frac{t}{2}}}^{\to 0}} = 6$$

$\to 1$



$$f(2\ln 2) = 6e^{-2e^{-\ln 2}} = 6e^{-2e^{\ln\frac{1}{2}}} = 6e^{-2\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= 6e^{-1} = \frac{6}{e}$$

$$f(0) = 6e^{-2} = \frac{6}{e^2}$$

11. $p: [0,\infty[\to \mathbb{R}$

$$p(t) = \frac{1}{1+a e^{-kt}} \quad / \quad a>0,\ k>0$$

(a) $\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+a\underbrace{e^{-kt}}_{\to 0}} = 1$

(b) La vitesse instantanée de la propagation de la rumeur au temps t est

$$p'(t) = \frac{-1}{(1+ae^{-kt})^2}\, a(-k)e^{-kt}$$

$$= \frac{ak\, e^{-kt}}{(1+ae^{-kt})^2}$$

(c) Soit $a = 10$ et $k = \frac{1}{2}$. Alors

$$p(t) = \frac{1}{1+10e^{-\frac{t}{2}}},$$

$$p'(t) = \frac{-1}{(1+10e^{-\frac{t}{2}})^2} \, 10\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{5e^{-\frac{t}{2}}}{(1+10e^{-\frac{t}{2}})^2}$$

$$10\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}$$

$$p''(t) = \frac{(1+10e^{-\frac{t}{2}})(-\frac{5}{2}e^{-\frac{t}{2}}) - 5e^{-\frac{t}{2}}\, 2(1+10e^{-\frac{t}{2}})'}{(1+10e^{-\frac{t}{2}})^4}$$

$$= \frac{-5e^{-\frac{t}{2}}(\frac{1}{2} - 5e^{-\frac{t}{2}})}{(1+10e^{-\frac{t}{2}})^3}$$

Donc $p(t) > 0$, $p'(t) > 0$ pour tout $t \in [0, \infty[$.

$$p''(t) = 0 \iff \frac{1}{2} - 5e^{-\frac{t}{2}} = 0$$

$$\iff \frac{1}{10} = e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\iff \ln\frac{1}{10} = -\frac{t}{2}$$

$$\iff \ln 10 = \frac{t}{2} \iff t = 2\ln 10$$

$p''(0) > 0$

p est strictement croissante, convexe sur $[0, 2\ln 10]$ et concave sur $[2\ln 10, \infty[$.

$$p(2\ln(10)) = \frac{1}{1+10\,e^{-\ln 10}} = \frac{1}{1+10\,\frac{1}{e^{\ln 10}}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{10}{10}} = \frac{1}{2}$$

la courbe représentative de p a le point d'inflexion $(2\ln 10, \frac{1}{2})$