LICENCE BIOLOGIE MATHÉMATIQUES 2008-2009

Corrigé du premier contrôle continue.

1. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{3x^2 - 1 \neq 0}_{\text{pour qu'on ne divise pas par zéro}}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq \frac{1}{3}\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

(b) $$f(-x) = \frac{3(-x)^3}{3(-x)^2 - 1} = -\frac{3x^3}{3x^2 - 1} = -f(x)$$

pour tout $x \in D$.

Ainsi la fonction f est impaire donc le domaine d'étude peut être réduit à

$[0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$

(ou à $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$).

(c) $$f(x) = \frac{3x^3}{3x^2 - 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = 3x^3$, $v(x) = 3x^2 - 1$

$u'(x) = 9x^2$, $v'(x) = 6x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v(x)^2} = \frac{27x^4 - 9x^2 - 18x^4}{(3x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{9x^2(x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{9x^2(x^2 - 1)}{(1 - 3x^2)^2}$$

d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}} = \infty$

$\lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{3\underbrace{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\to 0^+}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \infty$

$\lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{3\underbrace{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\to 0^-}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\infty$

Comme f est impaire, on obtient par symétrie

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x) = \infty$

(e) $f'(x) = 0 \iff x^2(x^2-1) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(-1) = -\frac{3}{2}, \; f(1) = \frac{3}{2}$

Ainsi le tableau de variations de f est

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; \infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; \infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	∞

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3}{3x^3 - x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{3 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}$

$$= 1$$

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est une <u>direction</u> asymptotique à la courbe représentative de f en ∞. (et aussi en $-\infty$ car f est impaire).

On va donc voir maintenant s'il y a meme une <u>droite</u> asymptotique $y = x + c$ de cette courbe ($c \in \mathbb{R}$ une constante), c.-à-d. si

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$:

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3}{3x^2-1} - x\right)$$

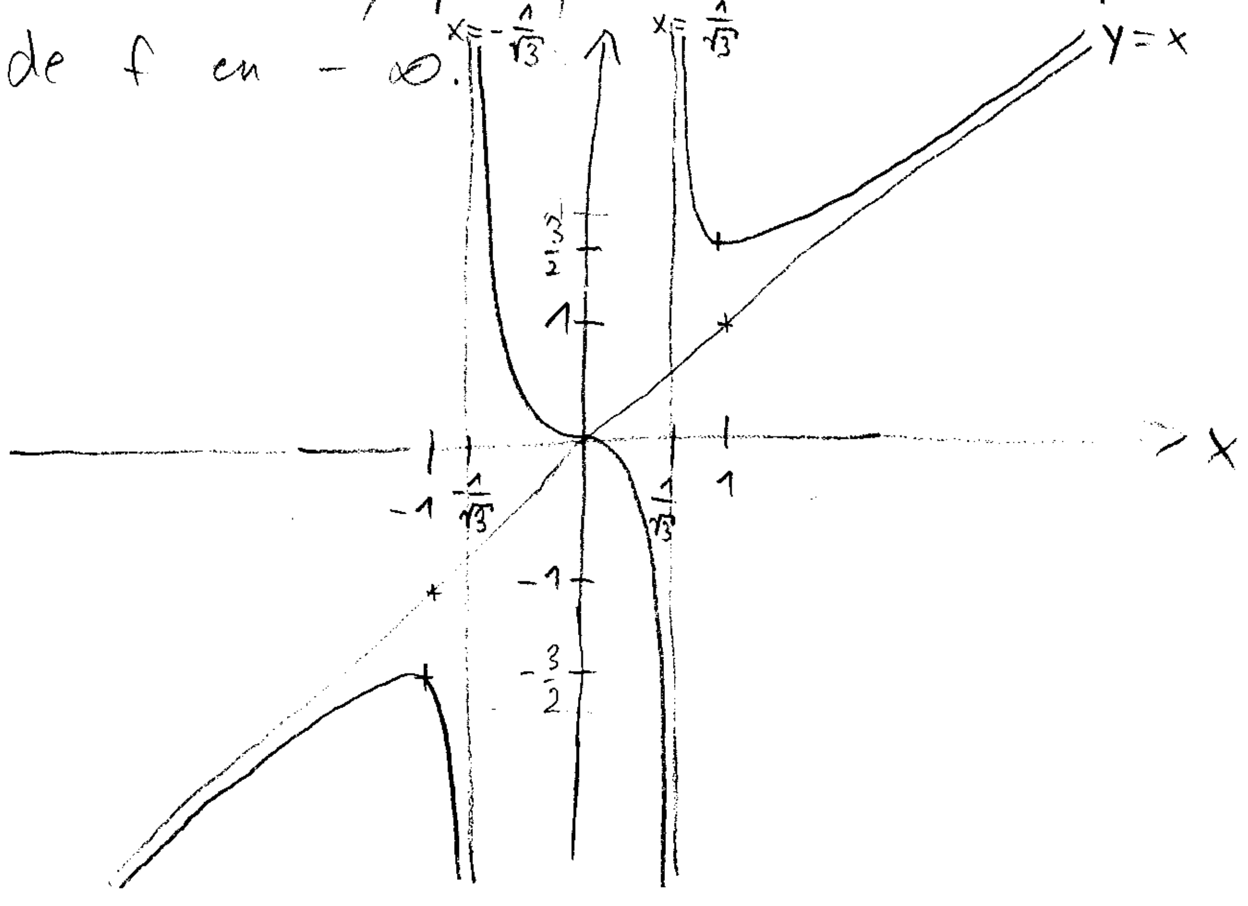
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - x(3x^2-1)}{3x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 3x^3 + x}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x - \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}} = 0 =: c$$

Donc la droite d'équation $y = x + c$ (donc $y = x$) est une droite asymptotique à la courbe représentative de f en ∞. Comme f est impaire, on obtient par symétrie que la droite d'équation $y = x - c$ (donc par hasard encore $y = x$) est une droite asymptotique à la courbe représentative de f en $-\infty$.

(g)



2. (a) $M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{d}} = M_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{d}}$

$$= M_0 \cdot e^{((\ln 2)(-\frac{t}{d}))} = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{d}\right)t}$$

$$= M_0 e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{d}.$$

(b) $M(T) = \frac{M(0)}{3}$

$$M_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{3} M_0$$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{3}$$

$$e^{\lambda T} = 3$$

$$\lambda T = \ln 3$$

$$T = \frac{\ln 3}{\lambda} = \frac{\ln 3}{\ln 2} d$$