

Vorlesung und Übung zur Modelltheorie

Inhaltsübersicht

14 × 90 Minuten Vorlesung und 12 × 90 Minuten Übung. Es gab 11 Übungsblätter, von denen nur die ersten 10 in den Übungen besprochen wurden. Die beiden letzten Abschnitte §8 und §9 kamen insofern zu kurz, als daß sie an einem einzigen Termin schriftlich ausgeteilt und nur grob besprochen wurden.

§1. Syntax der Logik erster Stufe. Alphabet, Sprachen, Induktion über den Term- und Formelaufbau, eindeutige Lesbarkeit von Termen und Formeln.

§2. Semantik der Logik erster Stufe. Strukturen, Belegungen, freie Variablen, Gültigkeitsbeziehung.

§3. Ultraprodukte. Filter, Ultrafilter, Ultraprodukte, Satz von Los, Endlichkeitsatz, axiomatisierbar \iff abgeschlossen unter Ultraprodukten und elementarer Äquivalenz, Spracherweiterung, Expansionen, Konstantenerweiterung, Wechselspiel zwischen Variablen und Konstanten, \aleph_1 -Saturiertheit von Ultraprodukten.

§4. Morphismen und Diagramme. Morphismen und Erweiterungen, elementare Einbettungen und allgemeinere formelerhaltende Abbildungen, allgemeines Diagrammlemma, zwei sehr allgemeine Charakterisierungssätze für persistente Formeln, insbesondere Charakterisierung von existentiellen und quantorenfreien Formeln, Normalformen von Formeln.

§5. Vollständigkeitsbegriffe und Quantorenelimination. Vollständigkeit, Modellvollständigkeit, Unterstrukturvollständigkeit, Quantorenelimination, primitive und 1-primitive Formeln, Primmodelle und Primstrukturen.

§6. Anwendung auf algebraisch abgeschlossene Körper. Unterstrukturvollständigkeit, Vollständigkeit bei fester Charakteristik, Übertragungsprinzipien, Satz von Ax über die Surjektivität injektiver Polynomabbildungen, Hilberts Nullstellensatz.

§7. Reell abgeschlossene Körper und der Fundamentalsatz der Algebra. Präordnungen und Anordnungen auf Ringen und Körpern, Lemma von Springer, Fortsetzung von Anordnungen, Charakterisierung reell abgeschlossener angeordneter Körper, algebraischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ohne Verwendung von Galoistheorie, reell abgeschlossene Körper (in der Ringsprache)

§8. Zählen von Nullstellen mit der Hermitematrix. Diagonalisierung quadratischer Formen, Kürzungssatz von Witt, Trägheitssatz von Sylvester, Hermitematrix, Signatur einer quadratischen Matrix, Zählen von Nullstellen mit Nebenbedingungen

§9. Anwendung auf reell abgeschlossene Körper. Satz von Rolle, Substrukturvollständigkeit und Vollständigkeit in der Sprache der angeordneten Körper, Modellvollständigkeit und Vollständigkeit in der Sprache der Ringe, Tarskis Quantorenelimination, Krivines Positivstellensatz.