

## Übungsblatt 4 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

**Aufgabe 1:** Die Sprache  $L_{\text{OF}}$  der angeordneten Körper („OF“ steht für „ordered fields“) bestehe aus den Konstantenzeichen 0 und 1, dem einstelligen Funktionszeichen  $-$ , den zweistelligen Funktionszeichen  $+$  und  $\cdot$  und dem zweistelligen Relationszeichen  $\leq$ . Man erlaubt sich auch in der Sprache  $L_{\text{OF}}$  einige Bequemlichkeiten, die man sonst in der Mathematik benutzt, soweit dies bei gutwilliger Interpretation des Lesers zu keinen Problemen führt. Zum Beispiel notiert man  $+$  und  $\cdot$  infix unter Beachtung der „Punkt vor Strich“-Regel. Man schreibt oft  $t_1 < t_2$  statt  $t_1 \leq t_2 \wedge t_1 \neq t_2$ ,  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  statt  $t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_3$ , 2 statt  $1 + 1$ ,  $t^2$  statt  $t \cdot t$ ,  $t_1 t_2 t_3$  statt  $(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3$  und so weiter. Gib ein Axiomensystem für die Klasse der angeordneten Körper in der Sprache  $L_{\text{OF}}$  an.

**Aufgabe 2:** Sei  $\mathcal{U}$  ein freier Ultrafilter auf  $\mathbb{N}$ . Man fasse angeordnete Körper als  $L_{\text{OF}}$ -Strukturen auf. Es bezeichne  $\mathbb{R}$  den angeordneten Körper der reellen Zahlen. Sei  $\mathcal{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$  die *Ultrapotenz* von  $\mathbb{R}$  (das heißt das Ultraprodukt  $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathcal{U}$ ) nach einem freien Ultrafilter  $\mathcal{U}$  auf  $\mathbb{N}$ .

- (a) Zeige, daß  $\mathcal{R}$  ein angeordneter Körper ist.
- (b) Gib eine Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  an, sodaß für  $a := [(a_i)_{i \in \mathbb{N}}] \in \mathcal{R}$ , jeden variablenfreien  $L_{\text{OF}}$ -Term  $t$  und die  $L_{\text{OF}}$ -Formel  $\varphi(x) := t < x$  gilt

$$\mathcal{R} \models \varphi[a].$$

**Aufgabe 3:** Die Sprache  $L_{\text{R}}$  der Ringe bestehe aus den Konstantenzeichen 0 und 1, dem einstelligen Funktionszeichen  $-$  und den zweistelligen Funktionszeichen  $+$  und  $\cdot$ . Gib ein Axiomensystem für die Klasse der Ringe in der Sprache  $L_{\text{R}}$  an.

**Aufgabe 4:** Man fasse Ringe als  $L_{\text{R}}$ -Strukturen auf. Es bezeichne  $\mathbb{Z}$  den Ring der ganzen Zahlen. Sei  $\mathcal{Z} := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$  die *Ultrapotenz* von  $\mathbb{Z}$  nach einem freien Ultrafilter  $\mathcal{U}$  auf  $\mathbb{N}$ . Gib eine Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  an, so daß  $a := [(a_i)_{i \in \mathbb{N}}] \in \mathcal{Z}$  im Ring  $\mathcal{Z}$  ein Element ungleich null ist, daß von unendlich vielen Primelementen geteilt wird.

**Aufgabe 5:** Sei  $L$  eine Sprache,  $\mathcal{K}$  eine Klasse von  $L$ -Strukturen und  $\mathcal{CK} := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ } L\text{-Struktur, } \mathcal{A} \notin \mathcal{K}\}$  das Komplement von  $\mathcal{K}$ . Zeige:

- (a)  $\mathcal{K}$  ist endlich axiomatisierbar genau dann, wenn  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{CK}$  beide axiomatisierbar sind.
- (b) Ist  $\mathcal{K}$  endlich axiomatisierbar,  $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$  und  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$ , so gibt es ein endliches  $\Delta \subseteq \Sigma$  mit  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Delta)$ .

**Abgabe** bis Montag, den 21. Mai 2007, um 14 Uhr.