

### Übungsblatt 3 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

**Aufgabe 1:** Sei  $L$  eine Sprache,  $t$  und  $t_1$   $L$ -Terme,  $x$  eine Variable und  $t_1(x/t)$  die Zeichenkette, die aus  $t$  entsteht, indem man jedes Vorkommen von  $x$  durch  $t$  ersetzt. Zeige durch Induktion über den Termaufbau:

- (a)  $t_1(x/t)$  ist ein  $L$ -Term
- (b) Ist  $h$  eine Belegung in einer  $L$ -Struktur  $\mathcal{A}$ , so gilt für  $a := t^{\mathcal{A}}[h]$

$$t_1^{\mathcal{A}}[h\binom{x}{a}] = t_1(x/t)^{\mathcal{A}}[h].$$

**Aufgabe 2:** Sei  $L$  die Sprache mit den 2-stelligen Funktionszeichen  $+$  und  $\cdot$  und dem  $n$ -stelligen Relationszeichen  $S$ . Finde eine  $L$ -Aussage  $\varphi$  so, daß für alle  $L$ -Strukturen  $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}})$ , in denen  $+$  <sup>$\mathcal{A}$</sup>  und  $\cdot$  <sup>$\mathcal{A}$</sup>  die gewöhnliche reelle Addition und Multiplikation sind, gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff S^{\mathcal{A}} \text{ ist kompakte Teilmenge des } \mathbb{R}^n.$$

**Aufgabe 3:** Sei  $L$  eine Sprache. Zeige:

- (a) Es gibt eine  $L$ -Struktur mit leerem Universum genau dann, wenn  $L$  keine Konstantenzeichen enthält.
- (b) Gibt es eine  $L$ -Struktur mit leerem Universum, so gibt es genau eine solche. Wir nennen sie die *leere*  $L$ -Struktur und bezeichnen sie mit  $\emptyset_L$ .

**Aufgabe 4:** Sei  $L$  eine Sprache ohne Konstantenzeichen und  $\mathcal{K}$  eine Klasse von  $L$ -Strukturen. Zeige, daß  $\mathcal{K}$  axiomatisierbar ist genau dann, wenn

$$\mathcal{K} \cup \{\emptyset_L\}$$

axiomatisierbar ist.

**Abgabe** bis Montag, den 14. Mai 2007, um 14 Uhr.