

Übungsblatt 10 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Entscheide für folgende Klassen von Strukturen jeweils, ob sie axiomatisierbar, vollständig, modellvollständig und substrukturvollständig sind: Die Klasse der

- (a) Mengen (also $L_=-$ -Strukturen mit $L_:= (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$),
- (b) endlichen Mengen,
- (c) unendlichen Mengen,
- (d) abzählbaren Mengen,
- (e) nichtleeren dichten linearen Ordnungen (in der Sprache L_{\leq}),
- (f) nichtleeren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte.

Aufgabe 2: Finde eine Sprache L und eine Klasse \mathcal{K} von L -Strukturen derart, daß

- (a) \mathcal{K} vollständig, aber nicht modellvollständig ist,
- (b) \mathcal{K} modellvollständig, aber nicht unterstrukturvollständig ist,
- (c) \mathcal{K} unterstrukturvollständig, aber nicht vollständig ist.

Aufgabe 3: Fasse \mathbb{R} als Ring, also als L_R -Struktur auf. Zeige, daß dann $\text{Th}(\mathbb{R})$ nicht unterstrukturvollständig ist.

Aufgabe 4: Sei L die um ein einstelliges Funktionszeichen f erweiterte Sprache L_{OF} der angeordneten Körper. Sei \mathcal{A} eine L -Struktur, deren L_{OF} -Redukt der angeordnete Körper der reellen Zahlen ist. Es ist also \mathcal{A} gleich \mathbb{R} zusammen mit einer Funktion $f^{\mathcal{A}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Betrachte die Ultrapotenz $\mathcal{B} := \mathcal{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ nach einem freien Ultrafilter \mathcal{U} auf \mathbb{N} . Wir identifizieren \mathcal{A} mit seinem Bild unter der kanonischen Einbettung $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$. Sei

$$I := \{b \in B \mid |b| < \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

die Menge der *infinitesimalen* Elemente von \mathcal{B} . Zeige

- (a) $f^{\mathcal{A}}$ ist stetig genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $i \in I$ gilt

$$f^{\mathcal{B}}(a + i) - f^{\mathcal{B}}(a) \in I,$$

- (b) $f^{\mathcal{A}}$ ist gleichmäßig stetig genau dann, wenn für alle $b \in B$ und alle $i \in I$

$$f^{\mathcal{B}}(b + i) - f^{\mathcal{B}}(b) \in I.$$

Abgabe bis Montag, den 2. Juli 2007, um 14 Uhr.