Übungsblatt 3 zur Modelltheorie

Sommersemester 2007

Aufgabe 1: Sei L eine Sprache, t und t_1 L-Terme, x eine Variable und $t_1(x/t)$ die Zeichenkette, die aus t entsteht, indem man jedes Vorkommen von x durch t ersetzt. Zeige durch Induktion über den Termaufbau:

(a) $t_1(x/t)$ ist ein L-Term

(b) Ist h eine Belegung in einer L-Struktur $\mathcal{A}$, so gilt für $a := t^{\mathcal{A}}[h]$

$$t_1^{\mathcal{A}}[h\tbinom{x}{a}] = t_1(x/t)^{\mathcal{A}}[h].$$

Aufgabe 2: Sei L die Sprache mit den 2-stelligen Funktionszeichen $+$ und $\cdot$ und dem n-stelligen Relationszeichen S. Finde eine L-Aussage φ so, daß für alle L-Strukturen $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}})$, in denen $+^{\mathcal{A}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}}$ die gewöhnliche reelle Addition und Multiplikation sind, gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff S^{\mathcal{A}} \text{ ist kompakte Teilmenge des } \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3: Sei L eine Sprache. Zeige:

(a) Es gibt eine L-Struktur mit leerem Universum genau dann, wenn L keine Konstantenzeichen enthält.

(b) Gibt es eine L-Struktur mit leerem Universum, so gibt es genau eine solche. Wir nennen sie die *leere* L-Struktur und bezeichnen sie mit $\emptyset_L$.

Aufgabe 4: Sei L eine Sprache ohne Konstantenzeichen und $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. Zeige, daß $\mathcal{K}$ axiomatisierbar ist genau dann, wenn

$$\mathcal{K} \cup \{\emptyset_L\}$$

axiomatisierbar ist.

Abgabe bis Montag, den 14. Mai 2007, um 14 Uhr.