Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 5 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Es sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß n genau dann eine Primzahl ist, wenn $(n-1)! + 1$ von n geteilt wird.

Aufgabe 2: Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und I ein Ideal von A. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
(a) $1 \notin I$ und $\forall a, b \in A : (ab \in I \implies (a \in I \text{ oder } b \in I))$
(b) $S := A \setminus I$ ist eine multiplikative Menge, d.h. $1 \in S$ und $SS \subset S$.
(c) A/I ist ein Integritätsbereich.
Sind die Aussagen erfüllt, so nennt man I ein *Primideal* von A. Zeigen Sie, daß ein Element $a \in A$ genau dann prim ist, wenn das von a in A erzeugte Ideal Aa ein Primideal ist.

Aufgabe 3: Sei A ein kommutativer Ring mit 1 und I ein Ideal von A. Man nennt I *echt*, wenn $1 \notin I$ (oder äquivalent $I \neq A$). Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
(a) I ist maximal unter allen echten Idealen von A.
(b) A/I ist ein Körper.
Sind die Aussagen erfüllt, so nennt man I ein *maximales* Ideal von A (man läßt das Adjektiv „echt“ einfach weg). Zeigen Sie, daß jedes maximale Ideal ein Primideal ist.

Aufgabe 4: Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, daß jedes echte Ideal von A in einem Primideal von A enthalten ist.

Abgabe bis Freitag, den 2. Juni, vor Beginn der Vorlesung.