Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}(n, K) := \{A \mid A \text{ ist } n \times n\text{–Matrix über } K, \det A = 1\}$$

eine Untergruppe der *allgemeinen linearen Gruppe*

$$\mathrm{GL}(n, K) := \{A \mid A \text{ ist } n \times n\text{–Matrix über } K, \det A \neq 0\}$$

ist. Ist $\mathrm{SL}(n, K)$ ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n, K)$?

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß eine Gruppe niemals Vereinigung zweier nichttrivialer Untergruppen ist.

Aufgabe 3: Sei G ein endliches Monoid mit neutralem Element, in dem die beiden Kürzungsregeln gelten, d.h. für alle $a, b, c \in G$

$$ab = ac \implies b = c \qquad \text{und} \qquad ba = ca \implies b = c.$$

Zeigen Sie, daß G eine Gruppe ist.

Aufgabe 4: Die Gruppe G sei abelsch. Wie für abelsche Gruppen üblich, bezeichnen wir mit 0 das neutrale Element von G und mit $+$ die Verknüpfung von G. Damit ist auch klar, was das Summenzeichen $\sum$ bedeuten soll. Zeigen Sie: Wenn G endlich ist und keine Elemente der Ordnung 2 besitzt, dann gilt

$$\sum_{g \in G} g = 0.$$

Abgabe bis Freitag, den 12. Mai, vor Beginn der Vorlesung.