

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2006

Aufgabe 1: Sei f der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschriebene Endomorphismus des \mathbb{R} -Vektorraums $V := \mathbb{R}^2$. Wir machen V zu einem Modul über dem Polynomring $\mathbb{R}[X]$ vermöge der durch

$$(*) \quad pv := (p(f))(v) \quad \text{für } p \in \mathbb{R}[X] \text{ und } v \in V$$

definierten Multiplikation mit Skalaren. Geben Sie explizit zwei nicht-triviale $\mathbb{R}[X]$ -Untermodule U und W von V an, so daß der $\mathbb{R}[X]$ -Modul V die direkte Summe von U und W ist.

Aufgabe 2: Man betrachte den \mathbb{R} -Vektorraum $V := \mathbb{R}[X]$ aller reellen Polynome in der Unbestimmten X . Es sei f der Endomorphismus von V , der jedem Polynom p seine Ableitung p' zuordnet (also $f(X^k) = kX^{k-1}$ für $k \geq 1$ und $f(1) = 0$). Wieder machen wir V zum $\mathbb{R}[X]$ -Modul vermöge der Vorschrift (*). Bestimmen Sie die Menge aller $\mathbb{R}[X]$ -Untermodule von V .

Aufgabe 3: Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $M \in \{A, B\}$ (lösen Sie die Aufgabe zunächst für $M = A$, dann für $M = B$). Wir fassen \mathbb{R}^3 als $\mathbb{R}[X]$ -Modul auf vermöge

$$pv := (p(M))(v) \quad \text{für } p \in \mathbb{R}[X] \text{ und } v \in \mathbb{R}^3.$$

Beschreiben Sie in möglichst einfachen Worten die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Mv$$

und die geometrische Gestalt des von v erzeugten $\mathbb{R}[X]$ -Untermoduls $\mathbb{R}[X]v \subseteq \mathbb{R}^3$ (je nachdem, wo v liegt).

Aufgabe 4: Beweisen Sie, daß es eine ganze Zahl x gibt, die gleichzeitig die Kongruenzen $8x \equiv 2 \pmod{9}$, $7x \equiv 3 \pmod{8}$ und $6x \equiv 4 \pmod{25}$ erfüllt (zum Beispiel, indem Sie x finden).

Erste Klausur am Samstag, den 24. Juni, von 10 bis 12 Uhr in den Räumen R711 und R712. Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt spätestens am 12./13. Juni in den Übungsgruppen.

Abgabe bis Freitag, den 16. Juni, vor Beginn der Vorlesung.