

**Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra II**

Sommersemester 2006

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie eine Basis des von

- (a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$
- (b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $M \subseteq \mathbb{Z}^2$ .

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie, daß der Polynomring über den ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z}[X] = \{a_n X^n + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}[X]$$

kein Hauptidealring ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie das von 2 und  $X$  in  $\mathbb{Z}[X]$  erzeugte Ideal.**Aufgabe 3:** Sei  $A$  ein kommutativer Ring mit 1,  $M$  ein  $A$ -Modul. Zeigen Sie für jedes Ideal  $I$  von  $A$ :

- (a)  $L := \{a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m \mid m \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_m \in I, y_1, \dots, y_m \in M\}$  ist ein Untermodul von  $M$ .
- (b) Der  $A$ -Modul  $M/L$  wird vermöge der durch

$$(a + I)(x + L) := ax + L \quad \text{für } a \in A \text{ und } x \in M$$

(wohl?)definierten Multiplikation mit Skalaren zu einem  $A/I$ -Modul.

- (c) Ist  $M$  ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $x_1, \dots, x_n$ , so ist  $M/L$  ein freier  $A/I$ -Modul mit Basis  $x_1 + L, \dots, x_n + L$ .

Sei nun  $A \neq \{0\}$ . Folgern Sie durch geschickte Wahl von  $I$ :Sind  $x_1, \dots, x_n$  und  $x'_1, \dots, x'_{n'}$  Basen von  $M$ , so gilt  $n = n'$ .**Erste Klausur** am Samstag, den 24. Juni, von 10 bis 12 Uhr in den Räumen R711 und R712.

Anmeldung ist unbedingt erforderlich und erfolgt in den Übungsgruppen spätestens am 12./13. Juni.

**Abgabe** bis Freitag, den 9. Juni, vor Beginn der Vorlesung.