Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 10 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Jedes Polynom aus $K[X]$ zerfalle über L. Zeigen Sie, daß L dann algebraisch abgeschlossen ist.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{P} := \{2, 3, 5, \dots\}$ die Menge der Primzahlen. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ ist bekanntlich $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/(p)$ ein endlicher Körper.

Aufgabe 2: Sei K ein endlicher Körper mit char $K = p$. Wir identifizieren $\mathbb{F}_p$ mit seinem Bild unter der Einbettung $\mathbb{F}_p \hookrightarrow K$ und nehmen daher $\mathbb{F}_p \subseteq K$ an. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\#K = p^n$.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\#K = p^n$, so ist K der Zerfällungskörper des Polynoms
$$X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$$
über $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 3: Sei $(p, n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ und L der Zerfällungskörper von $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$ über $\mathbb{F}_p$. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom $X^{p^n} - X$ hat in L nur einfache Nullstellen.

(b) $K := \{a \in L \mid a^{p^n} = a\}$ ist ein Unterkörper von L.

(c) $L = K$

(d) $\#K = p^n$

Aufgabe 4: Zeigen Sie mit Hilfe der beiden letzten Aufgaben:

(a) Zu jedem endlichen Körper K gibt es genau ein Paar
$$(p, n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$$
mit $\#K = p^n$.

(b) Zu jedem Paar $(p, n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen endlichen Körper K mit $\#K = p^n$ und zwar den Zerfällungskörper von $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$ über $\mathbb{F}_p$.

Abgabe bis Freitag, den 19. Januar, bis 10:30 Uhr.