Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 9 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Zerfällungskörper und deren Grade über $\mathbb{Q}$ von

(a) $X - 18$,
(b) $X^2 - 2$,
(c) $X^4 + X^2 + 1$ und
(d) $X^5 - 1$.

Aufgabe 2: Es sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und R ein Ring mit $K \subseteq R \subseteq L$. Zeigen Sie, daß R ein Körper ist.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie, daß $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.

Aufgabe 4: Es sei $L|K$ eine Körpererweiterung, $a \in K$ und $f := X^n - a$ irreduzibel im Polynomring $K[X]$. Es sei $b \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie

$$[K(b^m) : K] = \frac{n}{\gcd(m, n)} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}.$$

Hierbei bezeichne $\gcd(m, n) \in \mathbb{N}$ den größten gemeinsamen Teiler von m und n.

Hinweis: Schreibe $g := \gcd(m, n)$, $m = m'g$ und $n = n'g$ mit $m', n' \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von b^g über K und zeigen Sie $K(b^g) = K(b^m)$.

Abgabe bis Freitag, den 22. Dezember, bis 10:30 Uhr.