Übungsblatt 6 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Für jede Primzahl p bezeichnen wir mit $\mathbb{F}_p$ den Körper $\mathbb{Z}/(p)$. Beweisen Sie:

(a) $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ ist ein Körper.

(b) $\mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X + 1)$ ist kein Körper.

Aufgabe 2: Es sei $R = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) R ist ein noetherscher Integritätsbereich.

(b) 2 ist irreduzibel in R, aber nicht prim.

(c) R ist nicht faktoriell.

Aufgabe 3: Es sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq R$ eine *multiplikative Menge*, d.h. $1 \in S$ und $st \in S$ für alle $s, t \in S$. Es sei I ein Ideal von R mit $I \cap S = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller Ideale J von R mit $I \subseteq J$ und $J \cap S = \emptyset$ besitzt ein maximales Element.

(b) Jedes solche maximale Element ist ein Primideal.

Was besagt dies im Fall $S = \{1\}$?

Abgabe bis Freitag, den 1. Dezember, um 12 Uhr.