Übungsblatt 5 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Finden Sie eine Gruppenwirkung auf $\mathbb{C}$, deren Bahnen genau die Mengen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ $(r \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ sind.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie von folgenden Gruppen jeweils die Konjugationsklassen (also die Bahnen der Gruppenwirkung von G auf G durch Konjugation).

(a) Kleinsche Vierergruppe
(b) symmetrische Gruppe S_4
(c) Diedergruppe D_n $(n \geq 3)$

Aufgabe 3: Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Für Ideale I und J von R definieren wir

$$I : J := \{x \in R \mid \forall b \in J : bx \in I\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $I : J$ ist ein Ideal.
(b) Für alle Ideale I, J, K von R gilt $(I : J) : K = I : (JK)$.
(c) Ist R ein Integritätsbereich und sind I, J und $I + J$ Hauptideale von R, so ist auch $I : J$ ein Hauptideal von R.

Aufgabe 4: Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale von R mit $I_i + I_j = R$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Zeigen Sie

$$I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n = I_1 I_2 \cdots I_n.$$

Hinweis: Das Ideal $I_1 I_2 \cdots I_n$ besteht per Definition natürlich genau aus den *Summen* von Produkten der Gestalt $a_1 \cdots a_n$ mit $a_i \in I_i$.

Abgabe bis Freitag, den 24. November, um 12 Uhr.