Übungsblatt 3 zur Algebra

Wintersemester 2006/2007

Aufgabe 1: Es sei p eine Primzahl und H eine Untergruppe von S_p. Für alle $i, j \in \{1, \dots, p\}$ gebe es ein $\sigma \in H$ mit $\sigma(i) = j$. Überdies enthalte H eine Transposition. Zeigen Sie $H = S_p$.

Hinweis: Betrachte die durch

$$i \sim j :\iff (i = j \text{ oder } (i \neq j \text{ und } (i\ j) \in H))$$

definierte Äquivalenzrelation auf $\{1, \dots, p\}$. Für alle $i, j \in \{1, \dots, p\}$ und alle $\sigma \in H$ gilt

$$i \sim j \iff \sigma(i) \sim \sigma(j).$$

Alle Äquivalenzklassen haben dieselbe Anzahl an Elementen.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe der alternierenden Gruppe A_4.

Aufgabe 3: Sei G eine Gruppe. Für jedes $a \in G$ bezeichne $\varrho_a : G \to G : b \mapsto aba^{-1}$ die Konjugation von G mit a. Zeigen Sie, daß ϱ_a für jedes $a \in G$ ein Automorphismus von G ist. Man nennt diese Automorphismen *innere Automorphismen*. Geben Sie jeweils eine abelsche und eine nichtabelsche Gruppe G und einen Gruppenautomorphismus $\varphi : G \to G$ an, der kein innerer Automorphismus ist.

Aufgabe 4: Sei N ein Normalteiler der Gruppe G, so daß es echt zwischen N und G keine Untergruppe mehr gibt. Zeigen Sie, daß je zwei Untergruppen $H_1 \neq \{1\}$ und $H_2 \neq \{1\}$ von G mit

$$N \cap H_1 = \{1\} = N \cap H_2$$

isomorph zueinander sind.

Abgabe bis Freitag, den 10. November, um 12 Uhr.