Übungsblatt 6 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Beschreiben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ das Innere eines regelmäßigen n-Ecks im $\mathbb{R}^2$ durch *zwei* strikte polynomiale Ungleichungen.

Aufgabe 2: Finden Sie $m, n \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ so, daß das Innere S° der basisabgeschlossenen semialgebraischen Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$$

nicht gegeben ist durch

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \ldots, g_m(x) > 0\}.$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß der Abschluß $\overline{S}$ einer semialgebraischen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ stets wieder semialgebraisch ist.

Aufgabe 4: Für eine Menge X bezeichne 2^X die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X. Eine *Topologie* auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(b) Für alle $U, V \in \mathcal{O}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O}$.

(c) Für alle $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ ist $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{O}$.

Man nennt dann $(X, \mathcal{O})$ auch einen *topologischen Raum* und $\mathcal{O}$ sein System *offener Mengen*. Man schreibt dann oft wieder nur X statt $(X, \mathcal{O})$. Für zwei Topologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ auf einer Menge X nennt man $\mathcal{O}$ gröber als $\mathcal{O}'$ (und $\mathcal{O}'$ feiner als $\mathcal{O}$), wenn $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}'$.

Zeigen Sie: Ist X eine Menge und $\mathcal{U} \subseteq 2^X$, so gibt es eine gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{U}$ enthält. Diese besteht gerade aus den beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Elementen von $\mathcal{U}$ (der leere Durchschnitt $\bigcap \emptyset$ sei hierbei als X definiert).

Man nennt diese Topologie die von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie (und manchmal $\mathcal{U}$ eine Subbasis dieser Topologie).

Aufgabe 5: Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist. Zeigen Sie:

(a) Ist die Topologie von Y erzeugt von $\mathcal{V} \subseteq 2^Y$, so ist $f : X \to Y$ stetig genau dann, wenn für jedes $V \in \mathcal{V}$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist.

(b) Sind X, Y und Z topologische Räume und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist auch $g \circ f$ stetig.

Abgabe bis Donnerstag, den 2. Juni, vor der Vorlesung.