Übungsblatt 3 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Sei K ein angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie, daß das System aller Mengen

$$(a,b) := \{x \in K \mid a < x < b\} \qquad (a,b \in K)$$

ganz K überdeckt und abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist. Insbesondere bildet dieses System die Basis einer Topologie auf K, der sogenannten *Intervalltopologie*.

(b) Zeigen Sie, daß bezüglich der Intervalltopologie

$$+, \cdot : K \times K \to K \qquad \text{und} \qquad {}^{-1} : K^\times \to K$$

stetig sind. (Hierbei sind natürlich $K \times K$ und $K^\times$ mit der entsprechenden Produkt- bzw. Spurtopologie ausgestattet.)

(c) Zeigen Sie, daß K bezüglich der Intervalltopologie ein zusammenhängender topologischer Raum ist, genau dann, wenn K schnittvollständig (also $K \cong \mathbb{R}$) ist.

Aufgabe 2: Sei $L|K$ eine Körpererweiterung.

Elemente $a_1, \ldots, a_n \in L$ heißen *algebraisch unabhängig* über K, wenn sie keiner nichttrivialen algebraischen Gleichung über K genügen, das heißt für alle Polynome $p \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt

$$p(a_1, \ldots, a_n) = 0 \implies p = 0,$$

oder anders gesagt, der K-Algebrenhomomorphismus

$$K[X_1, \ldots, X_n] \to K[a_1, \ldots, a_n], \quad X_i \mapsto a_i \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

ist ein Isomorphismus (man kann also die a_i als Unbestimmte auffassen).

Eine Teilmenge $A \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über K, wenn je endlich viele paarweise verschiedene Elemente von ihr algebraisch unabhängig über K sind.

Eine Menge $B \subseteq L$ heißt *Transzendenzbasis* von $L|K$, wenn sie algebraisch unabhängig über K ist und die Körpererweiterung $L|K(B)$ algebraisch ist.

Zeigen Sie: Ist $A \subseteq C \subseteq L$, A algebraisch unabhängig über K und $L|K(C)$ algebraisch, so gibt es eine Transzendenzbasis B von $L|K$ mit $A \subseteq B \subseteq C$.

Nach Lösung der Aufgaben bitte wenden!

Hinweis: Gehen Sie vor wie beim Beweis, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Verwenden Sie das Lemma von Zorn.

Aufgabe 3: Sei C ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Zeigen Sie, daß es einen reell abgeschlossenen Teilkörper $R \subseteq C$ gibt mit

$$C = R(\sqrt{-1}).$$

Abgabe bis Freitag, den 6. Mai, um 12 Uhr.