Übungsblatt 2 zur Reellen Algebra (B IV)

Sommersemester 2005

Aufgabe 1: Sei K ein Körper. Eine Unterring $\mathcal{O}$ von K heißt *Bewertungsring* von K, wenn für alle $a \in K^\times$ gilt

$$a \in \mathcal{O} \qquad \text{oder} \qquad a^{-1} \in \mathcal{O}.$$

Einen Ring nennt man *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt. Zeigen Sie, daß jeder Bewertungsring $\mathcal{O}$ eines Körpers K ein lokaler Ring ist mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} = \{0\} \cup \{a \in K^\times \mid a^{-1} \notin \mathcal{O}\}.$$

Aufgabe 2: Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{O}_\leq := \{a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : |a| \leq N\}$$

ein Bewertungsring von K ist mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_\leq = \{a \in K \mid \forall N \in \mathbb{N} : N|a| \leq 1\}.$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie für die beiden Anordnungen $\leq$ des Körpers $\mathbb{R}((X))$ aus Aufgabe 2 auf Blatt 1 jeweils $\mathcal{O}_\leq$ und $\mathfrak{m}_\leq$ sowie den Körper $\mathcal{O}_\leq/\mathfrak{m}_\leq$.

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe. Eine lineare Ordnung $\leq$ auf der Menge G nennt man *Anordnung* von G, wenn

$$g_1 \leq g_2 \qquad \Longrightarrow \qquad g_1 h \leq g_2 h \text{ und } h g_1 \leq h g_2$$

für alle $g_1, g_2, h \in G$ gilt. Man nennt dann $(G, \leq)$ eine *angeordnete Gruppe* (und schreibt oft wieder nur G statt $(G, \leq)$).

Sei nun G eine angeordnete Gruppe und N ein Normalteiler der Gruppe G. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) N ist *konvex* bezüglich $\leq$, das heißt für alle $g_1, g_2 \in N$ und $h \in G$ gilt

$$g_1 \leq h \leq g_2 \implies h \in N.$$

(ii) Durch

$$g_1 N \leq g_2 N :\Longleftrightarrow g_1 \leq g_2 \text{ oder } g_1 N = g_2 N$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ wird eine Anordnung auf G/N definiert.

Abgabe bis Donnerstag, den 28. April, vor der Vorlesung.