

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1:** In jeder Spalte von  $A$  steht derselbe Vektor  $v$  aus Aufgabe 3. Also wird der Spaltenraum von  $A$  von  $v$  aufgespannt. Wegen  $v \neq 0$  ist also der Spaltenraum von  $A$  ein eindimensionaler Unterraum von  $K^n$ . Der Rang von  $A$  ist also 1. Weil  $A$   $n$  Spalten hat, ist der Kern von  $A$  also  $(n - 1)$ -dimensional. Wegen  $n - 1 \geq 1$  ist der Kern von  $A$  nichttrivial. Also ist 0 ein Eigenwert von  $A$  (womit (a) bewiesen ist) und der Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert 0 hat die Dimension  $n - 1$  (womit (b) beantwortet ist). Offensichtlich ist der Vektor  $v$  aus Aufgabe 3 ein Eigenvektor zum Eigenwert  $n$  (womit (c) erledigt ist).

Zu (d): Für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$  bezeichnen wir mit  $E_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$  den dazugehörigen Eigenraum. Wie in (b) gilt  $\dim_{\mathbb{C}} E_0 = n - 1$ . Angenommen, es gäbe noch einen weiteren Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, n\}$ . Jede Summe von Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten ist nach Vorlesung direkt und folglich wäre

$$n + 1 = (n - 1) + 1 + 1 \leq \dim E_0 + \dim E_n + \dim E_\lambda \leq \dim V = n,$$

was absurd ist.

Zu (e): Es gilt nach Vorlesung  $n - 1 = \dim E_0 \leq \mu(P_A, 0)$  und  $1 \leq \dim E_n \leq \mu(P_A, n)$  und andererseits  $\mu(P_A, 0) + \mu(P_A, n) \leq n$ , da  $P_A$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist. Also kann nur  $\mu(P_A, 0) = n - 1$  und  $\mu(P_A, n) = 1$  sein.

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2:** Zu (a): Es gilt

$$P_M = \det \begin{pmatrix} 1 - t & 2 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1 - t)(-t) - 2 = t^2 - t - 2.$$

Zu (b): Die Eigenwerte sind die Nullstellen von  $P_M$ . Es ist  $P_M(-1) = P_M(2) = 0$  und mehr als zwei Nullstellen kann ein Polynom vom Grad 2 nicht haben. Die Eigenwerte von  $M$  sind also genau die Zahlen  $-1$  und  $2$ .

Zu (c): Die Eigenräume zu den Eigenwerten  $\lambda_1 := -1$  und  $\lambda_2 := 2$  sind die Kerne der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 2 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Man sieht also sofort, daß  $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert

$\lambda_1$  und  $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2$  ist. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nach Vorlesung linear unabhängig sind, bilden  $v_1$  und  $v_2$  wegen  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

Zu (d): Es gilt

$$M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(\text{id}) = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

und  $M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(\text{id}) = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(\text{id})^{-1}$ . Man rechnet sofort nach

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3I,$$

weshalb also

$$M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(\text{id}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Zu (e): Es gilt

$$M = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}}(L(M)) = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(\text{id}) M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(L(M)) M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(\text{id}),$$

woraus mit Induktion sofort folgt

$$M^n = M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{v}}(\text{id}) M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(L(M))^n M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}}(\text{id}).$$

Da  $v_1$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1$  und  $v_2$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2$  ist, gilt

$$M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(L(M)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

also

$$M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(L(M))^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

und somit nach Einsetzen der in (d) berechneten Basiswechselformen

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2(-1)^{n+1} \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3:** Daß die  $n-1$  Spalten der Matrix  $M$  alle auf dem Vektor  $v$  senkrecht stehen, also in  $v^\perp$  enthalten sind, sieht man sofort. Nach Vorlesung gilt  $\dim v^\perp = \dim(\text{Span}(v))^\perp = n - \dim \text{Span}(v) = n - 1$ , also genügt es zu zeigen, daß die Spalten dieser Matrix linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix den Spaltenrang  $n-1$  hat. Der Spaltenrang ist aber gleich dem Zeilenrang. Es genügt also zu zeigen, daß der Zeilenrang gleich  $n-1$  ist. Dies kann man auf zwei Weisen sehen:

**Erste Lösung:** Subtrahiere die letzte Zeile von allen anderen. Dies sind elementare Zeilenoperationen, die den Zeilenraum, insbesondere den (Zeilen-)Rang nicht verändern. Dann erhält man in den ersten  $n-1$  Zeilen bis auf den Faktor  $n$  gerade die  $n-1$  kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**Zweite Lösung:** Die Matrix  $M'$ , die aus  $M$  durch Streichen der letzten Zeile entsteht, ist eine  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die nulldimensionalen Kern hat, da  $n$  kein Eigenwert der  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix mit lauter Einsen ist (nach Aufgabe 1(d) sind die einzigen Eigenwerte so einer Matrix ja 0 und  $n-1$ ). Also muß der Rang von  $M'$  gleich  $n-1$  sein.

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4:** Zu (a): Sei  $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in \mathbb{R}[t]$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ ) ein Polynom vom Grad  $\leq (n-1)$  mit  $P(f) = 0$ , d.h.  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = 0$ . Dann erhält man

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i v_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v_1) = 0$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit von  $v_1, \dots, v_n$ , daß  $a_i = 0$  für alle  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , also  $P = 0$ .

Für (b) und (c) gibt es eine elegante Variante, in der man zuerst (b) und dann (c) löst oder eine rechnerische Lösung, in der man zuerst (c) und dann (b) löst.

**Elegante Variante:** Zu (b): Da  $f$  die  $n$  Basisvektoren  $v_1, \dots, v_n$  zyklisch verschiebt, gilt  $f^n(v_i) = v_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , also  $f^n = \text{id}$ . Somit ist  $P := t^n - 1 \in \mathbb{R}[t]$  ein Polynom  $P \neq 0$  vom Grad  $n$  mit  $P(f) = 0$ . Zu (c): Sowohl das in (b) gefundene Polynom  $(-1)^n P$  als auch das charakteristische Polynom  $P_f$  sind Polynome vom Grad  $n$  in  $\mathbb{R}[t]$  mit höchstem Koeffizienten  $(-1)^n$ , die die Nullabbildung liefern, wenn man  $f$  für  $t$  einsetzt (für  $P_f$  benutze den Satz von Hamilton-Cayley!). Also ist  $Q := P_f - (-1)^n P \in \mathbb{R}[t]$  ein Polynom vom Grad  $\leq (n-1)$  mit  $Q(f) = 0$ . Nach Aufgabe (a) gilt also  $Q = 0$ , d.h.  $P_f = (-1)^n P = (-1)^n (t^n - 1)$  wie behauptet.

**Rechnerische Variante:** Zu (c): Die Darstellungsmatrix

$$A := M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$$

bezüglich der Basis  $v_1, \dots, v_n$  lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist  $P_f$  die Determinante von

$$A - tI = \begin{pmatrix} -t & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

und durch Entwicklung nach der letzten Spalte erhält man

$$P_f = \det(A - tI) = (-1)^{n+1} + (-t)(-t)^{n-1} = (-1)^n(t^n - 1).$$

Zu (b): Nach dem Satz von Hamilton-Cayley gilt  $P_f(f) = 0$ . Außerdem hat  $P_f$  den Grad  $n$ . Also könnten wir  $P := P_f$  setzen, oder (noch schöner)  $P := t^n - 1$ .

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5:** Zu zeigen ist:

(a)  $V = \text{Kern}(f) + \text{Bild}(f)$  und

(b)  $\text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f) = \{0\}$ .

Zu (a): Für jedes  $v \in V$  ist

$$v = (v - f^2(v)) + f^2(v)$$

und es gilt  $f^2(v) = f(f(v)) \in \text{Bild}(f)$  und  $v - f^2(v) \in \text{Kern}(f)$ , denn

$$f(v - f^2(v)) = f(v) - f^3(v) = f(v) - f(v) = 0.$$

Zu (b): Sei  $w \in \text{Kern}(f) \cap \text{Bild}(f)$ , also  $f(w) = 0$  und  $w = f(v)$  für ein  $v \in V$ . Dann gilt

$$w = f(v) = f^3(v) = f^2(f(v)) = f^2(w) = f(f(w)) = f(0) = 0.$$

**Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6:** Wir bezeichnen die zu  $M$  transponierte Matrix mit  $M^T$ .

Zu (a): Man rechnet sofort  $MM^T = I$  nach, weshalb  $M$  orthogonal ist.

Zu (b): Es gilt  $M^{-1} = M^T$  nach (a).

Zu (c): Da  $M$  orthogonal ist, kann die Determinante von  $M$  nur 1 oder  $-1$  sein. Man sieht sofort, daß bei einer Berechnung nach Sarrus von den 6 auftretenden Summanden alle ein negatives Vorzeichen haben außer einem, welcher aber verschwindet. Also muß  $\det M = -1$  sein.