Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik
Erste Klausur zur Linearen Algebra I 16. Dezember 2005
Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte)

Bevor die Klausur eröffnet wird (mit der Bearbeitung begonnen wird): Lassen Sie die Klausur vor sich liegen. Sie dürfen die Aufgaben erst lesen, wenn das Signal dazu gegeben wird. Legen Sie Ihren Studenten- oder Personalausweis neben sich. Prüfen Sie, ob Sie auf Ihrem Platz sitzen, also ob auf diesem Deckblatt Ihr Name steht. Wenn Ihr Name falsch geschrieben ist oder die Matrikelnummer nicht stimmt, korrigieren Sie dies bitte sofort auf dieser Seite des Deckblattes. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind

- ein von Hand beschriebenes Blatt (Benutzung der Rückseite erlaubt) im Format DIN A4 (210mm x 297mm) oder kleiner,
- konventionelles Schreibzeug,
- nicht beschriebenes Schmierpapier und
- eine Uhr (ohne eingebaute Kommunikationsgeräte).

Legen Sie außer diesen Sachen und Ihrem Ausweis nichts auf den Tisch (außer Taschentücher etc.). Wenn Sie Fragen haben, zögern Sie nicht, diese an das Aufsichtspersonal zu stellen.

Nachdem die Klausur eröffnet wird: Prüfen Sie sofort, ob Sie alle 7 Aufgaben erhalten haben. Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf dasjenige Blatt, auf dem die Aufgabe gestellt wird (Vorder- und Rückseite dürfen verwendet werden). Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Ihr Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf das Blatt zu schreiben, auf dem die Aufgabe gestellt wird. Schmierblätter können nur auf Antrag in Härtefällen abgegeben und berücksichtigt werden. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Es darf dabei auf mathematische Ergebnisse, die bis jetzt in der Vorlesung behandelt wurden, verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Basisergänzungssatz“, „Austauschlemma“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Ergebnisse aus den Übungen dürfen (wegen der Anlehnung der Klausuraufgaben an Übungsaufgaben) **nicht** verwendet werden (außer wenn man sie noch einmal herleitet).

Beachten Sie, daß die erste Aufgabe sich auf der Rückseite dieses Blattes befindet. Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen. Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 100 Minuten. Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 70. **Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!**

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 1 (10 Punkte): Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Markieren Sie jede wahre Aussage durch ein „w“, jede falsche durch ein „f“. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für eine falsche, zweideutige oder gar keine Antwort gibt es keinen Punkt (aber auch keinen Punktabzug). Sie brauchen die Antwort ausnahmsweise nicht zu begründen.

(a) Kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ hat mehr als drei Vektoren.
(b) Jeder Vektorraum besitzt ein Erzeugendensystem.
(c) Die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig im $\mathbb{C}^2$.
(d) Es gibt einen Vektorraum mit genau 2 Elementen.
(e) Es gibt zwei (voneinander verschiedene) komplexe Zahlen z mit

$$z^2 = -1.$$

(f) Es gibt einen Vektor des $\mathbb{R}^2$, der senkrecht auf allen anderen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ steht.
(g) Man kann im $\mathbb{R}^3$ Vektoren v und w finden, so daß

$$v, w, v + w$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
(h) Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen mit Koeffizienten aus einem Körper K ist stets ein Untervektorraum des K^n.
(i) Es gibt ein reelles homogenes lineares Gleichungssystem in 2 Variablen, dessen Lösungsmenge die Parabel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

ist.
(j) Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und steht x auf $-y$ senkrecht, so steht x auch auf y senkrecht, in Zeichen

$$x \perp (-y) \implies x \perp y.$$

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 2 (10 Punkte): Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Es seien v_2, v_3, v_4 linear unabhängig und es gelte $v_4 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$. Zeigen Sie $v_1 \in \mathrm{Span}(v_2, v_3, v_4)$.

Lösung zur Aufgabe 2:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 2 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 3 (10 Punkte): Bestimmen Sie

(a) alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die konjugiert zu $-z$ sind, d.h.

$$z = \overline{-z},$$

(b) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| - z = 1$.

Lösung zur Aufgabe 3:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 3 (Fortsetzung):

Name: Erwin Mustermann
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 4 (10 Punkte): Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor mit lauter Einsen. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

(und beweisen Sie, daß dies eine Basis ist).

Lösung zur Aufgabe 4:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 4 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 5 (10 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Matrizenprodukte:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -i \\ 2 & -2i & -1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Lösung zur Aufgabe 5:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 5 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 6 (10 Punkte): Prüfen Sie, ob die Vektoren $(-1, 2, 0, 1)$, $(1, 0, -1, 1)$ und $(4, 1, 1, 1)$ linear abhängig im $\mathbb{R}^4$ sind.

Lösung zur Aufgabe 6:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 6 (Fortsetzung):

Name: Erna Musterfrau
Matrikelnummer: 01/234567 **Übungsgruppe: 14**
Platz: 123 (Audimax, Mitte) **Erreichte Punktzahl:**

Aufgabe 7 (10 Punkte): Seien V und W K-Vektorräume und

$$f : V \to W, \qquad g : V \to W$$

lineare Abbildungen. Man definiere die Abbildung

$$(f + g) : V \to W$$

durch die Vorschrift

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Zeigen Sie, daß $f + g$ wieder eine lineare Abbildung ist.

Lösung zur Aufgabe 7:

Bitte Rückseite benutzen, falls benötigt.

Lösung zur Aufgabe 7 (Fortsetzung):