Übungsblatt 13 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Es sei stets R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß R ein (bezüglich Mengeninklusion) minimales Primideal enthält.

Hinweis: Zorn! Ordnen Sie die Menge der Primideale von R durch

$$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q} :\iff \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Ist jedes Hauptideal von R ein Primideal, so ist R ein Körper.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Aussagen sind für jeden kommutativen Ring R mit $1 \neq 0$ dazu äquivalent, daß R ein Integritätsbereich ist (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)?

(i) Zu jedem $a \in R$ gibt es ein $b \in R$ mit $ab \neq 0$

(ii) R ist ein Körper.

(iii) R ist Unterring eines faktoriellen Integritätsbereiches.

(iv) In R ist das Nullideal ein Primideal.

(v) Für alle $a, b \in R$ gilt $((a \neq 0 \text{ und } ab \neq 0) \implies b = 0)$.

(vi) Es gibt unendlich viele Paare $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von Primzahlen mit $q = p + 2$.

(vii) In R ist jedes Primideal das Nullideal.

(viii) $R \times R$ ist ein Integritätsbereich.

(ix) R ist Unterring eines Integritätsbereiches.

(x) Für alle $a, b \in R$ gilt $((a \neq 0 \text{ und } ab = 0) \implies b = 0)$.

Abgabe bis Montag, den 31. Januar, vor der Vorlesung.

Zweite Klausur am Samstag, den 12. Februar, von 10 Uhr 15 bis 11 Uhr 45 im Raum R611 (gegen 10 Uhr schon da sein!). Die Matrikelnummern der zu der zweiten Klausur zugelassenen Übungsteilnehmer werden bis Freitag, den 4. Februar, ausgehängt.