Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 10 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe vom Exponenten ≤ 2, d.h. $a^2 = 1$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie, daß G abelsch ist.

Aufgabe 2: Ist G eine Gruppe, so gibt es zu beliebigen $a, b \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_n \in G$ mit

$$[a, b] = g_1^2 \cdots g_n^2.$$

Hierbei bezeichnet $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ wie üblich den Kommutator von a und b.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Wie in Aufgabe 2 von Blatt 5 sei $3 \leq n \in \mathbb{N}$ und es bezeichne D_n die Diedergruppe mit $s, d \in D_n$, $\operatorname{ord}(s) = 2$, $\operatorname{ord}(d) = n$ und $sd = d^{-1}s$. Zeigen Sie, daß die absteigende Zentralreihe von D_n wie folgt aussieht:

$$D_n \supseteq \langle d^2 \rangle \supseteq \langle d^4 \rangle \supseteq \langle d^8 \rangle \dots$$

Welche Länge hat sie? Für welche n ist D_n nilpotent?

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und T eine Unbestimmte. Erinnern Sie sich an die Ringe $K[T]$ und $K[[T]]$ der Polynome bzw. formalen Potenzreihen aus der Linearen Algebra II. Bestimmen Sie die Einheitengruppen $K[T]^\times$ und $K[[T]]^\times$.

Abgabe bis Montag, den 10. Januar, vor der Vorlesung.

Noch einmal: Frohe Weihnachten!