Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt 4 zur Algebra

im Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß jedes kommutative Monoid, in dem die beiden Kürzungsregeln gelten, in eine abelsche Gruppe einbettbar ist.

Hinweis: Gehen Sie vor wie bei der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen oder ähnlich wie bei der Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß sich das Monoid $(\mathbb{R}, \cdot)$ nicht in eine Gruppe einbetten läßt.

Aufgabe 3: Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenepimorphismus mit Kern N. Geben Sie zueinander inverse Bijektionen zwischen den Mengen

$$S := \{I \mid N \subseteq I \subseteq G,\ I \text{ Untergruppe von } G\}$$

und

$$T := \{J \mid J \text{ Untergruppe von } H\}$$

an. Schreiben Sie die Bijektionen explizit auch für den Fall auf, daß N ein Normalteiler von G und $\varphi : G \to G/N$ der kanonische Epimorphismus ist.

Aufgabe 4: Sei N ein Normalteiler der Gruppe G, so daß es echt zwischen N und G keine Untergruppe mehr gibt. Zeigen Sie, daß je zwei Untergruppen $H_1 \neq \{1\}$ und $H_2 \neq \{1\}$ von G mit

$$N \cap H_1 = \{1\} = N \cap H_2$$

isomorph zueinander sind.

Aufgabe 5: Geben Sie jeweils eine Gruppe G an, für die folgende Aussage richtig ist:

(i) Für jedes $x \in G$ gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $x^n = 1$, aber es gibt keine natürliche Zahl $n \geq 1$, so daß für jedes $x \in G$ gilt $x^n = 1$.
(ii) G besitzt eine unendliche Untergruppe vom Index 2.
(iii) G ist abzählbar und besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe der Ordnung n.
(iv) G besitzt eine echte Untergruppe, die isomorph zu G ist.
(v) G ist unendlich und isomorph zu $G \times G$ (mit der komponentenweisen Verknüpfung).

Abgabe bis Montag, den 15. November vor der Vorlesung.

Merkblatt zum Scheinerwerb

Es werden zwei Klausuren geschrieben (am 6. Dezember und gegen Ende des Semesters). In beiden Klausuren werden etwa gleichviel Punkte vergeben. Sofern es keine triftige Entschuldigung gibt (Krankheit etc.), müssen zum Scheinerwerb beide Klausuren mitgeschrieben werden.

Zur zweiten Klausur wird aber nur zugelassen, wer regelmäßig selbstständig erstellte (dumme oder gescheite) Lösungen zu den Übungsaufgaben abgibt und an den Übungen *aktiv* (dumme oder gescheite Fragen stellen, Vorrechnen) teilnimmt. Über die Teilnahme zur zweiten Klausur (und damit über die Grundvoraussetzung zum Scheinerwerb) entscheidet der jeweilige Übungsleiter.

Es wird keine Nachklausur geschrieben. Wer eine Klausur nicht mitschreiben kann (und durch das Mitschreiben theoretisch den Schein erwerben hätte können) hat gegen Ende des Semesters die Möglichkeit zu einer mündlichen Prüfung, in der über die Vergabe des Scheins entschieden wird.

Die Scheine werden nicht benotet.

Die meisten Klausuraufgaben hängen thematisch eng mit Übungsaufgaben zusammen oder sind (eventuell stark vereinfachte) Versionen von Übungsaufgaben. Der einzige Weg, die Klausur zu bestehen, ist somit das regelmäßige selbstständige Bearbeiten von Übungsaufgaben. Beachten Sie, daß dies überdies natürlich der einzige Weg ist, Mathematik zu lernen.

Die geplante Bearbeitungszeit ist für jede der beiden Klausuren 90 Minuten. Zu den Klausuren sind keine Hilfsmittel zugelassen außer einem (eventuell) beidseitig von Hand beschriebenen „Spickzettel“ im Format DIN A4.

Am 17. und 18. November wird in den Übungen eine 45-minütige Testklausur angeboten, die (sofern überhaupt korrigiert) auf keine Weise in die Wertung miteingeht.

Faustregel: Versuchen Sie nicht, den Schein zu erwerben, sondern Mathematik zu lernen. Dann werden Sie in aller Regel den Schein erwerben.