

ÜBUNGEN ZU Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

<https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwimathss.html>

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vorgelegt sei die 2-dimensionale Cobb-Douglas Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad 0 < \alpha_i, i = 1, 2, \alpha_1 + \alpha_2 < 1.$$

Zeigen Sie, dass $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0, x_2 > 0\}$ strikt konkav ist.

Aufgabe 2

a) Es sei

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3 + x_1x_2 + \exp(x_1 + x_2 + x_3).$$

Untersuchen Sie f auf Konkavität bzw. Konvexität.

b) Vorgelegt sei

$$g(x) = x^T C x + b^T x + d$$

mit $C \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^N$ und $d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\nabla g(x)$ sowie $\nabla^2 g(x)$ und weisen Sie nach, dass die Funktion g strikt konvex ist.

Aufgabe 3

Man berechne die Funktionalmatrix der Abbildung

$$F(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad r > 0, \varphi \in [0, 2\pi[, \theta \in]0, \pi[.$$

Die durch $F(r, \varphi, \theta)$ eingeführten Koordinaten heißen Kugelkoordinaten. Für welche (r, φ, θ) ist die Funktionalmatrix invertierbar?

Aufgabe 4

Es sei

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^3$$

und $x_1 = r \cos(\varphi)$, $x_2 = r \sin(\varphi)$. Man berechne $\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ mit der Kettenregel.