

ÜBUNGEN ZU Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

<https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwimathss.html>

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie die Definitheit der quadratischen Form

$$Q(x, y, z) = x^2 - 4xy + y^2 - az^2 \text{ für } a > 0. \quad (1)$$

b) Analysieren Sie die Definitheit der Form Q aus (1) bezüglich der Nebenbedingung

$$B(x, y, z) = 4x - 2y + z = 0.$$

Aufgabe 2

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b - a \neq 0, \quad b - 2a \neq 0.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A .

Aufgabe 3

Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Untersuchen Sie f auf lokale Minima und Maxima.

b) Hat die Funktion

$$g(x, y) = (8x^3 - 12xy + y^3)^2$$

lokale Maxima?

Aufgabe 4

Es sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch, und es sei $A = O\Lambda O^T$ mit einer orthogonalen Matrix $O \in \mathbb{R}^{N,N}$ und

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ von A .

a) Berechnen Sie A^i für $i \in \mathbb{N}$.

b) Es sei nun $p(\lambda) = \sum_{i=0}^N a_i \lambda^i$ das charakteristische Polynom der Matrix A . Zeigen Sie:

$$a_0 I_N + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_N A^N = 0.$$

"Satz von Cayley-Hamilton"