

ÜBUNGEN ZU Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

<https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwimath.html>

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Weisen Sie nach, dass die Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $f_2(x) = \cos(x)$, $x \in]0, \pi[$ eine Umkehrfunktion besitzen. Diese Umkehrfunktionen werden *arcsin* und *arccos* genannt. Berechnen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen mit Hilfe der Umkehrregel.

b) Wiederholen Sie diese Analyse für

$$g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die logistische Kurve

$$L(t) = \frac{K}{1 + \exp(b - Rt)}, \quad K > 0, R > 0, b > 0, t \geq 0. \quad (1)$$

Fertigen Sie ein qualitatives Bild der Funktion $L'(t)$. Dazu erarbeiten Sie folgende Fragen:

(i) Wieviele mögliche relative Extrema besitzt $L'(t)$?

(ii) Wie verhält sich $L'(t)$ für $t \rightarrow \infty$?

b) Berechnen Sie für L aus (1) alle Extrema der Funktion

$$f(t) := L(t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Es sei $K(y) = y^3 - 9y^2 + 60y + 10$, $y \geq 0$ die Kostenfunktion einer Firma. Bestimmen Sie diejenigen Teilintervalle von $[0, \infty[$ auf denen die Funktion K konkav oder konvex ist.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die ersten drei Glieder $\sum_{i=0}^j a_i x^i$, $j = 0, 1, 2$ der Potenzreihen für die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

b) Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1}, \quad |x| < 1$$

versuche man die gesamte Potenzreihe anzugeben.

Aufgabe 5

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-(x-1)^2) + \sqrt{x^2+3}, & \text{für } x \leq 1, \\ ax + b, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion f für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.