

ÜBUNGEN ZU Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

<https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwi.math.html>

Übungszettel zur Klausurvorbereitung (mit Lösungen)

Aufgabe 1

Vorgelegt sei die Funktion

$$g(x, y) = x^2 - y^4 + 2y + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Bestimmen Sie alle Punkte mit einer horizontalen Tangentialebene.
- Welche der Punkte aus a) sind lokale Minima?

Aufgabe 2

Skizzieren Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

- $M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$
- $M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5)^2 \leq 7\}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty 5x \exp(-x^2) dx.$$

Aufgabe 4

Integrieren Sie

$$\int x^3 \ln(x) dx.$$

Aufgabe 5

Lösen Sie das Integral

$$\int_0^2 \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades zu

$$f(x) = x^2 \sin(x - \pi)$$

an der Stelle $\bar{x} = \pi/2$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + x \sin(x) - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{x^n}.$$

Aufgabe 8

Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi(3x - 5)) + x^2 - 3, & \text{für } x \geq 2, \\ a(x - 2) + b, & x < 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 9

Gegeben sei

$$f(x) = \sqrt{\ln(x + 7)}, \quad -6 < x.$$

- a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion und geben Sie ihren Definitionsbereich an.
- b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion mit der Umkehrregel.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange mögliche relative Extrema von

$$f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 + 4x_2 + x_3$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^4 - x_3 = 0.$$

Aufgabe 11

- a) Das vollständige Differential der Größe y sei durch

$$dy = (2x^2 + 3x^3)dx$$

gegeben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen y und x ?

b) u, v, w seien drei Größen. Welche Abhängigkeit besteht zwischen du, dv und dw , wenn

$$u^2 + 3uvw + w^3u = 0$$

gilt?

Lösungen

Aufgabe 1: a) $(0, (1/2)^{1/3})$, b) Keiner.

Aufgabe 2: Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, Kreis mit dem Mittelpunkt $(1, 5)$ und Radius $\sqrt{7}$.

Aufgabe 3: $(5/2) \exp(-9)$.

Aufgabe 4: $(1/4)x^4(\ln(x) - 1/4) + C$.

Aufgabe 5: 6

Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -\frac{\pi^2}{4} - \pi(x - \pi/2), \\ p_2(x) &= p_1(x) + \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)(x - \pi/2)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: $1/2, 0$.

Aufgabe 8: $a = 4 - 3\pi, b = 1$.

Aufgabe 9: $D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $f^{-1}(x) = \exp(x^2) - 7$, $(f^{-1}(x))' = 2x \exp(x^2)$.

Aufgabe 10: $P_1 = (1, -1, 2)$, $\lambda_1 = 1$ und $P_2 = (-1, -1, 0)$, $\lambda_2 = 1$.

Aufgabe 11: a) $y(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + C$, b) $0 = (2u + 3vw + w^3)du + 3uw dv + (3uv + 3w^2u)dw$.