

ÜBUNGEN ZU Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

<https://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/wiwi.math.html>

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vorgelegt sei die Funktion

$$g(x, y) = 3xy - 2x^2 - y^2 + 2x - 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Welche Punkte $(4, y)$ liegen auf der Höhenlinie $g(x, y) = 0$.
- b) Bestimmen Sie für diese Punkte die Darstellung des Tangentialraums.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = 2(x - y)^2 + y^2 \exp(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Bestimmen Sie alle Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ mit horizontaler Tangentialebene.
- b) Ein Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ mit einer horizontalen Tangentialebene ist ein lokales Minimum von f , falls

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) &> 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Welche der Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ aus a) sind lokale Minima?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Gradient und den maximalen Definitionsbereich in der (x, y) -Ebene von

$$g(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y + 1)}{x + 7}.$$

Aufgabe 4

Es sei $f(x, y) = 3x - \exp(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- a) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, \varphi(x)) = 0$.

b) Berechnen Sie $\varphi'(x)$ i) explizit und ii) durch implizites Differenzieren der Gleichung $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Aufgabe 5

Vorgelegt sei die Funktion

$$g(x, y) = x^3 - xy^2 - 8 \sin(y) + \pi^2/2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal bei $(x, y) = (2, \pi/2)$ nach y auflösbar ist, d.h. lokal eine Funktion φ existiert mit $g(x, \varphi(x)) = 0$.

Hinweis: Satz über implizite Funktionen

b) Berechnen Sie $\varphi'(2)$.