

# Struktur von Endomorphismen

## Lineare Algebra II (B II)

### Letzte Vorlesung, 22. Juli 2004

Gottfried Barthel, FB Mathematik, Uni Konstanz

Korrigierte und ergänzte Version; aktueller Stand: 31. Juli 2004

Der folgende Text entspricht weitgehend der Version, die ich in der letzten Vorlesung präsentiert und am folgenden Freitag an die damals anwesenden Hörer/innen verteilt habe. Es handelt sich um die – nur minimal überarbeiteten – Notizen zu meiner persönlichen Vorbereitung auf die Vorlesung; auf sprachliche und stilistische Gesichtspunkte wurde (so gut wie gar) nicht geachtet.

Gegenüber der ursprünglichen Fassung wurden lediglich geringfügige Korrekturen sowie wenige – meist als solche kenntlich gemachte – Ergänzungen vorgenommen. Ein gelegentlich auftretendes „(? ...!)“ ist als Aufforderung an die Leser/innen gemeint, sich den Sachverhalt klar zu machen.

#### Thema **ZE** Zerlegung bzgl. eines Endomorphismus

**Gegeben:** Ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  und ein Endomorphismus  $f$ .

**Gesucht:** Eine Zerlegung von  $V$  in eine direkte Summe von  $f$ -invarianten Unterräumen, auf denen  $f$  eine möglichst einfache Beschreibung gestattet.

#### Erinnerung an **A: Grobzerlegung I** (Abspalten der „höheren Eigenräume“)

**A.1/2** Vorbereitung: Zerlegung  $V = N \oplus B$  in  $f$ -invariante Teilräume  $N = \text{Kern } f^s$  und  $B = \text{Bild } f^s$  für den minimalen Exponenten  $s > 0$ , so dass  $f|_{\text{Bild } f^s}$  injektiv ist (zugleich der kleinste Index, bei dem die aufsteigende Folge  $(\text{Kern } f^j)_{j \geq 0}$  und die absteigende Folge  $(\text{Bild } f^j)_{j \geq 0}$  von  $f$ -invarianten UVR stationär werden, d.h. von dem ab  $\text{Kern } f^j = \text{Kern } f^{j+1}$  bzw.  $\text{Bild } f^j = \text{Bild } f^{j+1}$  gilt).

**A.3** Zu  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $f_\lambda := f - \lambda \cdot \text{id}_V$  analoge Zerlegung  $V = N_\lambda \oplus B_\lambda$  mit  $N_\lambda := \text{Kern } f_\lambda^{s(\lambda)}$  („verallgemeinerter Eigenraum“ zum EW  $\lambda$ ) und  $B_\lambda := \text{Bild } f_\lambda^{s(\lambda)}$ , wobei wieder  $s(\lambda)$  der minimale Exponent  $j$  ist, so dass  $f_\lambda|_{\text{Bild } f_\lambda^j}$  injektiv ist.

Zusatz: Es gilt stets  $s(\lambda) \leq n$ ; weiter gilt  $N_\lambda \cap N_\mu = 0$  für  $\lambda \neq \mu$  (folgt aus **B.2**), angewandt auf die Einschränkung von  $f$  auf  $\text{Kern } (f_\lambda^{s(\lambda)} \cdot f_\mu^{s(\mu)})$ .

#### **A.4 Satz (Grobzerlegung I: Abspalten der „höheren Eigenräume“)**

Hat  $f$  in  $\mathbb{K}$  die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , so gibt es eine (eindeutig bestimmte) Zerlegung

$$V = \left( \bigoplus_{i=1}^r N_{\lambda_i} \right) \oplus R$$

in  $f$ -invariante Unterräume  $N_{\lambda_i}$  wie in A.3 und einen  $f$ -invarianten „Rest“  $R$ , so dass  $f - \lambda_i \text{id}_V$  auf  $N_{\lambda_i}$  jeweils nilpotent und auf den anderen direkten Summanden injektiv ist; weiter hat  $f|_R$  keine Eigenwerte in  $\mathbb{K}$ .

[Nachträgliche Bemerkung: Falls das Minimalpolynom in ein Produkt von (Potenzen von) Linearfaktoren zerfällt; ist die Grobzerlegung damit abgeschlossen; der folgende Abschnitt **B**] kann dann übersprungen werden.]

### Erinnerung an **B: Grobzerlegung II**

**B.2 Zerlegungslemma** Ist  $M_f = P_1 P_2$  eine Produktzerlegung des Minimalpolynoms in zwei teilerfremde Faktoren, so sind die Unterräume  $\text{Kern } P_i(f)$  und  $\text{Bild } P_i(f)$  für  $i = 1, 2$  jeweils  $f$ -invariant, und es gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \text{Kern } P_i(f) = \text{Bild } P_j(f) \quad \text{für } i \neq j; \\ (\beta) \quad & V = \text{Kern } P_1(f) \oplus \text{Kern } P_2(f) = \text{Bild } P_1(f) \oplus \text{Bild } P_2(f) \end{aligned}$$

bzw. äquivalent

$$\begin{aligned} (\beta') \quad & V = \text{Kern } P_i(f) \oplus \text{Bild } P_i(f) \quad \text{für } i = 1, 2; \\ (\gamma) \quad & \text{das Polynom } P_i \text{ ist das Minimalpolynom von } f|_{\text{Kern } P_i(f)}. \end{aligned}$$

Im Beweis wird benutzt, dass es zu zwei teilerfremden Polynomen  $P_1, P_2$  stets Polynome  $Q_1, Q_2$  mit  $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$  gibt (gilt allgemein in Hauptidealringen); weiter wird folgendes **Lemma B.3** benutzt: Ist  $V = \sum_{i=1}^r V_i$  eine (nicht notwendig direkte) Summendarstellung mit  $f$ -invarianten Teilräumen  $V_i$  und bezeichnet  $M_i$  das zu  $f|_{V_i}$  gehörige Minimalpolynom, so gilt  $M_f = \text{kgV}(M_i, i = 1, \dots, r)$ .

**B.4 Satz (Grobzerlegung II)**: Ist  $M_f = \prod_{i=1}^m Q_i$  die Faktorisierung des Minimalpolynoms in Potenzen  $Q_i = P_i^{n_i}$ , wobei die Polynome  $P_i \in \mathbb{K}[T]$  irreduzibel und paarweise teilerfremd sind, so gilt  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Kern } Q_i(f)$ , und die Summanden dieser Zerlegung sind  $f$ -invariant.

**Nachträglicher Zusatz:** Aus dem Zerlegungslemma folgt, dass jeder Faktor  $Q_i$  das Minimalpolynom des eingeschränkten Endomorphismus auf dem zugehörigen direkten Summanden  $\text{Kern } Q_i(f)$  ist.

Damit ist die Grobzerlegung, die der Faktorisierung des Minimalpolynoms in Potenzen von Primfaktoren entspricht, abgeschlossen; zur feineren Analyse genügt es jetzt, sich auf die einzelnen direkten Summanden der Grobzerlegung zu beschränken. Wir können also jetzt annehmen, dass in der Primpotenzzzerlegung von  $M_f$  nur ein einziger Faktor  $P^n$  mit einem irreduziblen (und o.E. normierten) Polynom  $P$  auftritt. (Diese Annahme ist für den folgenden Abschnitt **C** aber nicht erforderlich.)

### **C** Feinstrukturanalyse: Vorbereitungen

Bei den folgenden Punkten wird nicht vorausgesetzt, dass  $M_f$  nur einen einzigen Primteiler hat.

**C.0 Definition und Notationen („privat“):** Jedem Vektor  $v \in V, v \neq 0$  wird zugeordnet:

- ( $\alpha$ ) sein *Minimalpolynom*  $M_{f,v}(T) \in K[T]$  in naheliegender Weise: das normierte Polynom  $M$  kleinsten Grades mit  $M(f)(v) = 0$  („kanonisches“ Erzeugendes des offensichtlichen Ideals  $\{P \in K[T]; P(f)(v) = 0\}$ );

- ( $\beta$ )  $\ell_f(v) := \text{grad } M_{f,v}$  (wegen  $f^0 := \text{id}_V$  gilt stets  $\ell_f(v) \geq 1$ );
- ( $\gamma$ )  $\langle v \rangle_f := \text{lin}(f^j(v), j \in \mathbb{N}_{\geq 0}) = \text{lin}(f^j(v), j = 0, \dots, \ell_f(v) - 1)$ : die „ $f$ -invariante Hülle“ von  $v$ . (Man nennt einen solchen UVR  $\langle v \rangle_f$  auch „ $f$ -monogenen“ oder auch „ $f$ -zyklisch“.)

[Nachträgliche Änderung: Zur Vermeidung von Missverständnissen habe ich in ( $\beta$ ) die in der Vorlesung benutzte Bezeichnung  $\text{grad}_f(v)$  durch  $\ell_f(v)$  ersetzt; das Symbol  $\ell$  soll an *Länge* (einer linear unabhängigen Familie) oder auch an *Lebensdauer* erinnern.]

Diskussion der Beziehung zwischen diesen „lokalen“ und dem „globalen“ Minimalpolynomen:

**C.1 Bemerkung:** Es gilt stets  $M_{f,v} \mid M_f$ ; weiter gilt

$$M_f = \text{kgV}(M_{f,v_i}; (v_i) \text{ Erzeugendensystem von } V).$$

**Beweis.** Aus  $M_f(f) = 0$  folgt  $M_{f,v} \mid M_f$  für jedes  $v \in V$ . Damit gilt auch  $\widetilde{M}_f := \text{kgV}(M_{f,v_i}) \mid M_f$ ; andererseits gilt ersichtlich  $\widetilde{M}_f(f) = 0$  und damit  $M_f \mid \widetilde{M}_f$ .

Alternative: Man benutze obiges Lemma **B.3**, angewandt auf die Familie der UVR  $V_i := \langle v_i \rangle_f$ .  $\square$

[Nachtrag: Es genügt ersichtlich, sich auf ein „ $f$ -Erzeugendensystem“  $(v_i)_{i \in I}$ , d.h. eine Familie mit  $\sum_i \langle v_i \rangle_f = V$  zu beschränken.]

**C.2 Bemerkung:** Für einen beliebigen Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  gilt

- ( $\alpha$ )  $\langle v \rangle_f \cong K[T]/(M_{f,v})$ ; insbesondere gilt
- ( $\beta$ )  $\dim \langle v \rangle_f = \ell_f(v)$ ;
- ( $\gamma$ ) die Familie  $\mathcal{B}_{f,v} := (f^j(v))_{j=0, \dots, \ell_f(v)-1}$  ist eine Basis von  $\langle v \rangle_f$ , und bzgl. dieser Basis wird  $f|_{\langle v \rangle_f}$  durch die Begleitmatrix von  $M_{f,v}$  dargestellt.

**Beweis.** Die Abbildung  $K[T] \rightarrow V$ ,  $P(T) \mapsto P(f)(v)$  ist die Komposition der Einsetzungshomomorphismen  $K[T] \rightarrow \text{End}(V)$ ,  $P(T) \mapsto P(f)$  und  $\text{End}(V) \rightarrow V$ ,  $g \mapsto g(v)$ ; der Kern ist offensichtlich (? ...!) das Ideal  $(M_{f,v})$ ; das Bild ist  $\langle v \rangle_f$ ; damit folgt die Behauptung aus dem Isomorphiesatz.  $\square$

**C.3 Bemerkung:** Ist  $U \subset V$  ein  $f$ -invarianter UVR, so gibt es auf dem Restklassen-VR  $\overline{V} := V/U$  einen induzierten Endomorphismus  $\overline{f}: \overline{V} \rightarrow \overline{V}$ , und für die jeweiligen Minimalpolynome gilt  $M_{\overline{f}} \mid M_f$  sowie  $M_{\overline{f}, \overline{v}} \mid M_{f,v}$  für einen beliebigen Vektor  $\overline{v} := [v]_U$  mit  $v \notin U$ .

**Beweis.** Die Existenz von  $\overline{f}$  folgt sofort aus dem Homomorphiesatz, angewandt auf die Komposition

$$V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\pi_U} V/U;$$

aus  $M_f(f) = 0$  bzw.  $M_{f,v}(f)(v) = 0$  folgt der Rest.  $\square$

**C.4 Ergänzende Bemerkung (Nachtrag):** Für eine Zerlegung  $v = v_1 + v_2$  (dabei  $v, v_1, v_2 \neq 0$ ) mit  $\text{ggT}(M_{f,v_1}, M_{f,v_2}) = 1$  gilt  $M_{f,v} = M_{f,v_1} \cdot M_{f,v_2}$ .

[Beweis: Für  $\widetilde{M} := \text{kgV}(M_{f,v_1}, M_{f,v_2}) = M_{f,v_1} \cdot M_{f,v_2}$  gilt  $\widetilde{M}(f)(v) = 0$  und damit  $M_{f,v} \mid \widetilde{M}$ ; aus  $v_i = v - v_j$  (mit  $i \neq j$ ) folgt andererseits sofort  $M_{f,v_i} \mid \text{kgV}(M_{f,v}, M_{f,v_j})$  und damit  $M_{f,v_i} \mid M_{f,v}$ , also auch  $\widetilde{M} \mid M_{f,v}$ .]

Insbesondere folgt daraus mit **B.4** und **F.1**, dass es Vektoren  $v \in V$  mit  $M_{f,v} = M_f$  gibt; d.h. das Minimalpolynom des Endomorphismus tritt als Minimalpolynom eines Elements auf. (In einem vernünftig präzisierbaren Sinn hat sogar „fast jeder“ Vektor  $v \in V$  diese Eigenschaft.)

## **D** Feinstruktur I: Endomorphismen mit irreduziblem Minimalpolynom

Wir betrachten zunächst  $(V, f)$  mit  $P(f) = 0$ , wobei  $P \in K[T]$  irreduzibel und o.E. normiert ist; es gilt also  $M_f = P$ . Wir setzen  $\ell := \text{grad } P$ .

**D.0 Bemerkung:** ( $\alpha$ ) Für einen solchen Endomorphismus gilt entweder  $f = 0$  ( $\iff P(T) = T$ ) oder  $f$  ist injektiv.

( $\beta$ ) Für beliebiges  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  gilt  $M_{f,v} = P$  (und damit  $\ell_f(v) = \text{grad } P = \ell$ ).

( $\gamma$ ) Der zu  $v \neq 0$  gehörige  $f$ -monogene UVR  $\langle v \rangle_f$  ist „ $f$ -einfach“, d.h. er hat keine nicht-trivialen  $f$ -invarianten Unterräume.

**Beweis.** ( $\alpha$ ) Falls Kern  $f \neq 0$ , dann gibt es  $v \neq 0$  mit  $M_{f,v} = T = P$ .

( $\beta$ ) Klar, denn es gilt  $M_{f,v} \mid M_f = P$  und  $\text{grad } M_{f,v} > 1$ , und  $P$  ist irreduzibel.

( $\gamma$ ) Für  $w \in \langle v \rangle_f$  mit  $w \neq 0$  gilt natürlich  $\langle w \rangle_f \subset \langle v \rangle_f$ ; nach **C.2**, ( $\beta$ ) haben beide Vektorräume die gleiche Dimension und sind somit gleich.  $\square$

Zur Vereinfachung der Terminologie bemerken wir, dass ein  $f$ -einfacher UVR notwendig auch  $f$ -invariant ist.

### **D.1 Satz (Feinstruktur bei irreduziblem Minimalpolynom):**

Es gibt eine freie Familie von Vektoren  $(v_1, \dots, v_r)$  mit folgenden Eigenschaften:

( $\alpha$ ) Der Vektorraum  $V$  ist die direkte Summe

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \langle v_i \rangle_f$$

von  $f$ -einfachen UVR; insbesondere gilt  $\dim V = r \cdot \ell$ . (Erinnerung:  $\ell := \text{grad } P$ .)

( $\beta$ ) Die Familie  $(f^j(v_i))_{i=1, \dots, r; j=0, \dots, \ell-1}$ , also etwas expliziter:

$$(v_1, \underbrace{f(v_1), \dots, f^{\ell-1}(v_1)}_{\text{falls } \ell > 1}; v_2, \underbrace{f(v_2), \dots, f^{\ell-1}(v_2)}_{\text{falls } \ell > 1}; \dots; v_r, \underbrace{f(v_r), \dots, f^{\ell-1}(v_r)}_{\text{falls } \ell > 1})$$

bildet eine Basis von  $V$ ; bzgl. dieser hat  $f$  die Matrixdarstellung

$$\text{diag}(M_P, i = 1, \dots, r)$$

als Blockdiagonalmatrix aus Begleitmatrizen (entsprechend Mitteilung **PE, A.5**).

Nachtrag (Vorschlag zur Terminologie): Es erscheint sinnvoll, eine Familie  $(v_1, \dots, v_r)$  mit diesen Eigenschaften als „ $f$ -Basis“ von  $V$  zu bezeichnen.

**Beweis.** Falls  $P = T - \lambda$ , also  $f = \lambda \cdot \text{id}_V$ , klar, beliebige Basis tut's; sei also jetzt o.E.  $\text{grad } P = \ell > 1$  (und damit  $f$  injektiv nach D.0, ( $\alpha$ )).

Induktion nach  $\dim V$ ; **Induktionsanfang**  $\dim V = \text{grad } P$  klar: Wähle  $v_1 \in V \setminus 0$  beliebig, dann gilt  $\dim \langle v_1 \rangle_f = \text{grad } P = \dim V$ , also  $\langle v_1 \rangle_f = V$ , fertig.

**Induktionsvoraussetzung:** Sei  $m > \text{grad } P$ ; Aussage gelte für  $\dim V \leq m - 1$ .

**Induktionsschritt:** Wähle  $v_1 \in V \setminus 0$  beliebig, setze  $U := \langle v_1 \rangle_f$ ; das ist ein  $f$ -invarianter UVR. Betrachten jetzt Restklassen-VR  $\bar{V} := V/U$  mit der Projektion  $\pi: V \rightarrow \bar{V}$  und dem induzierten Endomorphismus  $\bar{f}$ ; nach Bem. C3 gilt  $M_{\bar{f}} \mid M_f = P$ ; weil  $P$  irreduzibel ist, gilt also  $M_{\bar{f}} = P$ ; weiter gilt  $\dim \bar{V} = m - \text{grad } P < m$ . Nach Ind.vor. gibt es eine freie Fam.  $(\bar{v}_i)_{i=2, \dots, r}$  von Klassen in  $\bar{V}$ , so dass

$$\bar{V} = \bigoplus_{i=2}^r \langle \bar{v}_i \rangle_{\bar{f}}$$

gilt. Wähle jetzt in jeder Klasse  $\bar{v}_i$  einen Repräsentanten  $v_i \in V$ ; betrachte  $f$ -invar. UVR

$$W := \sum_{i=2}^r \langle v_i \rangle_f.$$

Behauptung 1: Es gilt  $W = \bigoplus_{i=2}^r \langle v_i \rangle_f$ , und  $\pi|_W: W \rightarrow \bar{V}$  ist ein Isomorphismus. Denn einerseits gilt  $\dim W \leq (r-1) \cdot \text{grad } P = \dim \bar{V}$  nach der Dim.formel; andererseits ist die Einschränkung der Restklassenabbildung  $V \rightarrow V/U$  auf  $W$  nach Konstruktion von  $W$  surjektiv (? ... !); somit gilt die Dim.gleichheit. Dann Isomorphie auch klar.

Behauptung 2:  $U \cap W = 0$ . Denn für  $w \in U \cap W$  gilt  $\pi(w) = 0$  und damit auch  $w = 0$ , weil  $\pi|_W$  ein Isomorphismus ist.

Damit gilt  $V = U \oplus W$ ; diese Zerlegung ist  $f$ -invariant, und die Familie  $(v_1, v_2, \dots, v_r)$  hat die behaupteten Eigenschaften (? ... !). □

## D.2 Ausblick auf die „richtige“ Algebra (B III):

Es ist nicht schwer zu sehen, dass der Restklassenring  $K[T]/(P)$  ein Körper ist [das gilt allgemein für den Restklassenring eines Hauptidealringes  $R$  modulo dem Ideal  $(q)$ , das von einem irreduziblen Element  $q \in R$  erzeugt ist]; diesen Körper  $K[T]/(P)$  können wir mit Hilfe der Begleitmatrix  $M_P \in K^{n \times n}$  als Unterring  $K[M_P]$  in  $K^{n \times n}$  realisieren. Es gilt dann  $P(M_P) = 0$ ; betrachtet man also das Ausgangspolynom  $P$  auch als Polynom über diesem neuen Körper  $L := K[T]/(P) \cong K[M_P]$ , so hat es in diesem größeren Körper eine Nullstelle, nämlich die Restklasse  $\bar{T} := [T]_{(P)}$  bzw. die Begleitmatrix  $M_P$ .

Wenn man also über einem endlichen Körper  $K = \mathbb{F}_p$  ein irreduzibles Polynom  $P$  vom Grad  $n$  hat, so ist  $\mathbb{F}_p[T]/(P)$  ein Körper mit  $q = p^n$  Elementen. Für  $n = 2, 3$  genügt für die Irreduzibilität, dass  $P$  keine Nullstelle in  $K$  hat.

## E Feinstruktur II: Nilpotente Endomorphismen (Jordansche Normalform)

E.0 Situation, Notation usw.: Betrachten jetzt  $(V, f)$  mit  $M_f = T^n$  und  $n \geq 2$ ; also  $f^n = 0$  (d.h.  $f$  nilpotent), aber  $f^{n-1} \neq 0$ .

Für  $v \in V$  def „ $f$ -Lebensdauer“

$$\ell(v) := \ell_f(v) = \min(k \in \mathbb{N}; f^k(v) = 0)$$

(wie oft muss man  $f$  iterieren, bis  $v$  verschwindet?), dann also  $M_{f,v} = T^{\ell(v)}$  (vgl. C.0,  $\beta$ ).

**E.1 Erinnerung:** Für einen beliebigen Exponenten  $\ell \geq 2$  hat die Begleitmatrix zu  $T^\ell$  die Form

$$M_{T^\ell} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Einsen auf der unteren Nebendiagonale); bzgl. der „rückwärts durchlaufenen“ Basis ergibt sich die Form

$$J_\ell(0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(Einsen auf der oberen Nebendiagonale). Diese  $(\ell \times \ell)$ -Matrix  $J_\ell(0)$  nennen wir einen *nilpotenten Standard-JORDAN-Block* (oder auch Standard-JORDAN-Block zum EW  $\lambda = 0$ ).

Für einen beliebigen Skalar  $\lambda$  hat  $(T - \lambda)^\ell$  die Begleitmatrix

$$M_{(T-\lambda)^\ell} = \begin{pmatrix} 0 & & & & -c_0 \\ 1 & 0 & & & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & & -c_2 \\ & 0 & \cdot & \cdot & \dots \\ & & \cdot & \cdot & \dots \\ & & & \cdot & 1 & 0 & -c_{\ell-2} \\ & & & & 0 & 1 & -c_{\ell-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_k := \binom{\ell}{k} (-\lambda)^{\ell-k},$$

die mit dem Paar von zueinander inversen Transformationsmatrizen  $S, S^{-1}$  (hier für  $\ell = 5$  aus einer Maple-Rechnung übernommen)

$$S = \begin{bmatrix} \lambda^4 & -\lambda^3 & \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ -4\lambda^3 & 3\lambda^2 & -2\lambda & 1 & 0 \\ 6\lambda^2 & -3\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda & 6\lambda^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 & 4\lambda^3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

mit dem Zwischenergebnis

$$S^{-1}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 4\lambda & 10\lambda^2 \\ 0 & 1 & 3\lambda & 6\lambda^2 & 10\lambda^3 \\ 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 & 4\lambda^3 & 5\lambda^4 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^5 \end{bmatrix}$$

gemäß  $S^{-1}MS = J$  in die Matrix

$$J_\ell(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

überführt werden. Diese  $(\ell \times \ell)$ -Matrix  $J_\ell(\lambda)$  nennen wir einen *Standard-JORDAN-Block* zum EW  $\lambda$ .

### E.2 Satz (Feinstruktur für nilpotente Endomorphismen):

Es gibt eine freie Familie von Vektoren  $(v_1, \dots, v_r)$  (o.E. mit  $n = \ell(v_1) \geq \dots \geq \ell(v_r) \geq 1$ ), so dass die davon erzeugten  $f$ -monogenen UVR eine  $f$ -invariante Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \langle v_i \rangle_f$$

als direkte Summe liefern.

Die Familie  $(f^j(v_i))_{i=1, \dots, r; j=0, \dots, \ell(v_i)-1}$ , also etwas expliziter

$$(v_1, f(v_1), \dots, f^{\ell_1-1}(v_1); v_2, \underbrace{f(v_2), \dots, f^{\ell_2-1}(v_2)}_{\text{falls } \ell_2 > 1}; \dots; v_r, \underbrace{f(v_r), \dots, f^{\ell_r-1}(v_r)}_{\text{falls } \ell_r > 1})$$

(mit  $\ell_i := \ell(v_i)$ ) bildet eine Basis von  $V$ ; bzgl. dieser Basis hat  $f$  die Darstellung

$$\text{diag}(\text{BMat}(M_{f, v_i}), i = 1, \dots, r)$$

als Blockdiagonalmatrix aus Begleitmatrizen (gemäß Mitteilung PE, A.5).

Werden die Blöcke  $(f^j(v_i))_{j=0, \dots, \ell_f(v_i)-1}$  zu den einzelnen  $f$ -monogenen Summanden  $\langle v_i \rangle_f$  jeweils rückwärts durchlaufen, so erhalten wir die wohlbekannte Darstellung

$$\text{diag}(J_{\ell(v_i)}(0), i = 1, \dots, r)$$

als Blockdiagonalmatrix aus nilpotenten Standard-JORDAN-Blöcken und somit die

### Jordansche Normalform für nilpotente Endomorphismen.

**Beweis.** Induktion nach dem Exponenten  $n$ ; **Induktionsanfang**  $n = 1$  in Struktursatz D.1 für irreduzible Minimalpolynome bereits erledigt; sei jetzt  $n > 1$ .

**Induktionsvoraussetzung:** Aussage gelte für nilpotente Endomorphismen mit Minimalpolynom  $T^s$  für  $s \leq n - 1$ .

**Induktionsschritt:** Betrachte  $f$ -invar. UVR  $W := \text{Bild}(f)$ ; dann hat  $f|_W$  das Minimalpolynom  $T^{n-1}$ , denn wegen  $f^n = 0$  und  $f^{n-1} \neq 0$  gilt  $f^{n-1}|_W = 0$ , aber  $f^{n-2}|_W \neq 0$ ; wende auf  $(W, f|_W)$  die Induktionsvoraussetzung an und erhalte freie Familie  $(w_1, \dots, w_{\tilde{r}})$  wie im Satz.

Wegen  $W = \text{Bild } f$  kann man zu den Vektoren  $w_i$  Urbilder  $v_i$  bzgl.  $f$  wählen; diese bilden eine freie Familie und erzeugen einen  $f$ -invar. UVR

$$U := \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \langle v_i \rangle_f = \bigoplus_{i=1}^{\tilde{r}} \langle v_i \rangle_f$$

mit  $f(U) = W$ . Wir sind damit aber leider noch keineswegs fertig, weil  $U$  i.A. ein echter UVR von  $V$  ist.

Wir betrachten jetzt den Restklassen-VR  $\bar{V} := V/U$  mit dem induzierten Endomorphismus  $\bar{f}$  (vgl. [C.3] und den Beweis zu [D.1]).

**Zwischenbehauptung:** Zu jeder Restklasse  $\bar{v} \in \bar{V}$  gibt es einen Repräsentanten  $v \in \text{Kern } f$  (insbesondere ist also  $\bar{f} = 0$  der Null-Endomorphismus des Restklassen-VR  $\bar{V}$ ).

*Beweis:* Für einen Restklassenvektor  $\bar{v} \neq \bar{0}$  wähle einen beliebigen Repräsentanten  $\tilde{v} \in V$  und betrachte dessen Bild  $w := f(\tilde{v})$ . Nach Def. gilt  $w \in W = \text{Bild}(f)$ , also  $w = f(u)$  mit  $u \in U$ ; für neuen Repräsentanten  $v := \tilde{v} - u$  gilt dann  $f(v) = 0$ .

**Zwischenbehauptung:**  $\square$

Sei jetzt  $(\bar{v}_j)_{j=\tilde{r}+1, \dots, r}$  eine Basis von  $\bar{V}$ . Wir können nach der Zwischenbehauptung für diese Basisvektoren Repräsentanten  $v_j \in \text{Kern } f$  wählen.

Die Familie  $(v_1, \dots, v_r)$  hat dann die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

### **E.3 Korollar (Feinstruktur für „quasi-nilpotente“ Endomorphismen):**

Die analoge Aussage gilt *mutatis mutandis*<sup>1</sup> für Endomorphismen mit Minimalpolynom  $M_f = (T - \lambda)^n$ : In einer geeigneten Basis hat diese eine Darstellung als Blockdiagonalmatrix aus „JORDAN-Kästchen“  $J_{s_i}(\lambda)$ .

Zusammen mit der Grobzerlegung I aus [A] haben wir damit endlich den (hier nicht nochmals formulierten)

### **Satz von der Jordanschen Normalform**

bewiesen. Der Beweis ist übrigens nicht nur über  $\mathbb{C}$  (oder einem algebraisch abgeschlossenen Körper) gültig, sondern er gilt allgemein für „spaltende“ Endomorphismen, also solche, deren Minimalpolynom ein Produkt von Linearfaktoren ist.

### **F Feinstruktur III: „ $P$ -primäre Endomorphismen“**

**F.0 Situation; Notation:** Wir betrachten jetzt nur noch  $(V, f)$  mit Minimalpolynom  $M_f = P^n$ , wobei  $P \in K[T]$  irreduzibel ist und  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  gilt. Einen solchen Endomorphismus  $f$  nennen wir „ $P$ -primär“. (Die Terminologie motiviert sich aus dem Begriff eines „Primärideals“: Das Ideal  $(M_f)$  ist  $(P)$ -primär mit assoziiertem Primideal  $P$ .)

Zur Bezeichnungsvereinfachung definieren wir  $g := P(f)$ ; dann gilt  $g^n = 0$  (also  $g$  nilpotent), aber  $g^{n-1} \neq 0$ . Insbesondere hat dann jeder Vektor  $v \in V \setminus \text{Kern } g^{n-1}$  die folgende Eigenschaft:

**F.1 Notiz** Es gibt einen Vektor  $v_0 \in V$  mit  $M_{f, v_0} = P^n$ .  $\square$

### **F.2 Satz (Feinstruktur für $P$ -primäre Endomorphismen):**

Es gibt eine freie Familie von Vektoren  $(v_1, \dots, v_r)$ , so dass die davon erzeugten  $f$ -monogenen

<sup>1</sup>Wer hier mit seinem Latein am Ende ist: *Nach Abänderung des Abzändernden.*

UVR eine  $f$ -invariante Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \langle v_i \rangle_f$$

als direkte Summe liefern.

Die Familie  $(f^j(v_i))_{i=1, \dots, r; j=0, \dots, \ell_f(v_i)-1}$ , also etwas ausführlicher:

$$(v_1, f(v_1), \dots, f^{\ell_1-1}(v_1); \underbrace{v_2, f(v_2), \dots, f^{\ell_2-1}(v_2)}_{\text{falls } \ell_2 > 1}; \dots; v_r, \underbrace{f(v_r), \dots, f^{\ell_r-1}(v_r)}_{\text{falls } \ell_r > 1})$$

(mit  $\ell_i := \ell_f(v_i)$ ) bildet eine Basis von  $V$ ; bzgl. dieser Basis hat  $f$  die Darstellung

$$\text{diag}(\text{BMat}(M_{f, v_i}), i = 1, \dots, r)$$

als Blockdiagonalmatrix aus Begleitmatrizen (gemäß Mitteilung PE, A.5).

**Beweis.** Induktion nach dem Exponenten  $n$ ; **Induktionsanfang**  $n = 1$  in Struktursatz D.1 für Endomorphismen mit irreduziblem Minimalpolynom bereits erledigt; sei jetzt  $n > 1$ .

**Induktionsvoraussetzung:** Aussage gelte für  $P$ -primäre Endomorphismen mit Minimalpolynom  $P^k$  für  $k \leq n - 1$ . (Erinnerung:  $P$  nach Voraus. irreduzibel.)

**Induktionsschritt:** Betrachte  $f$ -invar. UVR  $W := \text{Bild}(g)$ ; dann hat  $f|_W$  das Minimalpolynom  $P^{n-1}$ , denn wegen  $P^n(f) = g^n = 0$  und  $P^{n-1}(f) = g^{n-1} \neq 0$  gilt  $g^{n-1}|_W = 0$ , aber  $g^{n-2}|_W \neq 0$ ; wende auf  $(W, f)$  die Induktionsvoraussetzung an und erhalte freie Familie  $(w_1, \dots, w_{\tilde{r}})$  wie im Satz.

Wegen  $W = \text{Bild } g$  kann man zu den Vektoren  $w_i$  Urbilder  $v_i$  bzgl.  $g$  wählen; diese bilden eine freie Familie und erzeugen einen  $f$ -invar. UVR

$$U := \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \langle v_i \rangle_f = \bigoplus_{i=1}^{\tilde{r}} \langle v_i \rangle_f .$$

Falls  $U = V$ , sind wir fertig; anderenfalls betrachten wir  $\bar{V} := V/U$  mit dem induzierten Endomorphismus  $\bar{f}$  und argumentieren ähnlich wie im nilpotenten Fall: Es gilt  $\bar{g} = P(\bar{f}) = 0$ ; damit ist  $P$  das Minimalpolynom von  $\bar{f}$  (? ... !); wir können also auf  $(\bar{V}, \bar{f})$  den Struktursatz D.1 anwenden; finden freie Familie  $(\bar{v}_{\tilde{r}+1}, \dots, \bar{v}_r)$ ; repräsentieren diese durch Familie  $(v_{\tilde{r}+1}, \dots, v_r)$  von Vektoren in  $\text{Kern}(g) \subset V$ , und die bringen's dann, d.h. sie bilden zusammen mit den schon gewählten  $(v_1, \dots, v_{\tilde{r}})$  die gesuchte freie Familie ... □

**Fazit** Mit dem Grobzerlegungssatz B.4 und den drei Feinstruktursätzen D.1 (für Endomorphismen mit irreduziblem Minimalpolynom), E.2 (für nilpotente Endomorphismen) sowie F.2 (für  $P$ -primäre Endomorphismen) ist damit der in der Mitteilung PE, A.5 angekündigte Struktursatz vollständig bewiesen:

*Zu jedem Endomorphismus  $f$  eines endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -VR  $V$  (mit beliebigem Skalarenkörper) gibt es eine Basis, bzgl. der die repräsentierende Matrix zu  $f$  eine Blockdiagonalmatrix ist, deren einzelnen Blöcke Begleitmatrizen zu gewissen Primpotenz-Teilern  $P_i^{n_i}$  des Minimalpolynoms sind.*

[Frage (Nachtrag:) Sei  $(V, f)$  beliebig; was kann uns das Polynom  $P_f/M_f$  (also char.Poly. geteilt durch Min.poly) noch an weiterer Strukturinformation liefern?]

---

Für KoKoKo (-rrekturen und -nstruktive -mmentare):

mailto: Gottfried Barthel <Gottfried.Barthel@uni-konstanz.de>