Universität Konstanz
Fachbereich für Mathematik und Statistik
Gottfried Barthel

SomSem 05
15.4.2005

Übungen zur Algebraischen Geometrie, Blatt 1

Zum Erwerb eines Übungsscheins ist die schriftliche Bearbeitung (eines angemessenen Teils) der Aufgaben erforderlich! Abgabe am Donnerstag, 21.04, zu Beginn der Vorlesung.

1.1 Für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_{\geqq 1}$ und einen Zahlkörper K betrachten wir die Menge der K-rationalen Punkte auf der reellen affin-algebraischen Menge $S_m := N(\mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - m)$ (Kreislinie vom Radius $\sqrt{m}$ um den Nullpunkt). In der Vorlesung am Montag, 11.04., wurde skizziert, dass die $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte auf S_1 dicht liegen: Die Schar der nicht-vertikalen Geraden durch den Punkt $W = (-1, 0)$ definiert eine Zuordnung $S_1 \setminus \{W\} \longleftrightarrow N(\mathbb{R}^2, x-1)$, indem sich der zweite Schnittpunkt der Gerade mit dem Kreis und der Schnittpunkt mit der Tangente im Punkt $-W$ entsprechen („stereographische Projektion“ der punktierten Kreislinie auf die Tangente im Diametralpunkt).

(i) Man zeige, dass diese Zuordnung ein Homöomorphismus ist, folgere daraus die Dichtheit und gewinne weiter daraus eine parametrisierte Darstellung der $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte.

(ii) Man leite daraus weiter die angegebene Parameterdarstellung der pythagoreischen Zahlentripel her. – Zusatzfrage: Was hat die Parameterdarstellung $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ mit der ganzen Gaußschen Zahl $u + iv \in \mathbb{Z}[i]$ zu tun?

(iii) Man zeige durch geeignete Modifikation der Konstruktion, dass auch die $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte auf S_2 dicht liegen.

(iv) Man überlege, ob sich dazu der durch die ganzzahlige Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegebene lineare Automorphismus von $\mathbb{R}^2$ nutzbringend einsetzen lässt.

(v) Man zeige, dass für quadratfreies $m \in \mathbb{N}_{\geqq 2}$ mit $m \equiv 3, 6, 7 \mod 8$ die Kreislinie S_m keine $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte enthalten kann.

(vi) Was kann man für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d = 2, 3, 5, 6$ über K-rationale Punkte auf S_m aussagen (z.B. für $m = 3, 6, 7$)?

(vii) Man diskutiere die analogen Fragen für die Hyperbeln $H_m := N(\mathbb{R}^2, x^2 - y^2 - m)$.

(viii) Man diskutiere die analogen Fragen für die (reell) „leeren Kreislinien“ $S_m = N(K, x^2 + y^2 - m)$ mit $m \in \mathbb{Z}_{\leqq -1}$ („Kreise mit imaginärem Radius“) über imaginär-quadratischen Zahlkörpern $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d = 1, 2, 3, 5, 6$.

1.2 Man bestimme die Menge der K-rationalen Punkte auf der „Einheitskreislinie“ $S = N(K^2, x^2 + y^2 - 1)$ für die endlichen Körper $K = \mathbb{F}_q$ mit $q \leqq 9$.

Viel Erfolg!